PROBLEMAS RESUELTOS

SELECTIVIDAD ANDALUCÍA

2014

MATEMÁTICAS II

TEMA 5: INTEGRALES

- Junio, Ejercicio 2, Opción A
- Junio, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 2, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 2, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 2, Opción B

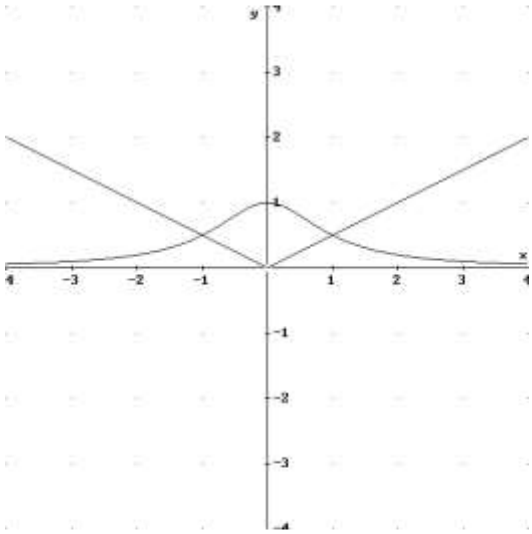
Sean $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x)=\frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

a) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



Abrimos la función $f(x)$: $f(x)=\frac{|x|}{2}=\begin{cases}\frac{x}{2} & si \quad x>0 \\ -\frac{x}{2} & si \quad x\leq 0\end{cases}$

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow x+x^3=2\Rightarrow x=1$$

$$-\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow -x-x^3=2\Rightarrow x=-1$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A=2\cdot\int_0^1\left[\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{x}{2}\right]dx=2\left[arc\,tg\,x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=2\left(arc\,tg\,1-\frac{1}{4}\right)-2\left(arc\,tg\,0-\frac{0}{4}\right)=2\frac{\pi}{4}-2\frac{1}{4}=\frac{\pi-1}{2}u^2$$

Sea *f* la función definida por $f(x) = x\ln(x+1)$ para $x > -1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I = \int x \cdot ln(x+1)\ dx$, que es una integral por partes.

$$u = \ln(x+1);\ du = \frac{1}{x+1}\ dx$$
$$dv = x\,dx;\ v = \frac{x^2}{2}$$

$$I = \int x \cdot ln(x+1)\,dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{(x+1)}dx = \frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) + C$$

Calculamos la constante:

$$0 = \frac{1^2}{2} \cdot ln(1+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1+1)\right) + C \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$\frac{x^2}{2} \cdot ln(x+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1)\right) - \frac{1}{4}$$

Determina una función derivable $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ sabiendo que $f(1)=-1$ y que

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como es derivable también es continua.

Calculamos $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+C & si \quad x<0 \\ e^x-x+D & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Como $f(1)=-1 \Rightarrow e^1-1+D=-1 \Rightarrow D=-e$

Como es continua en $x=0$, tenemos:

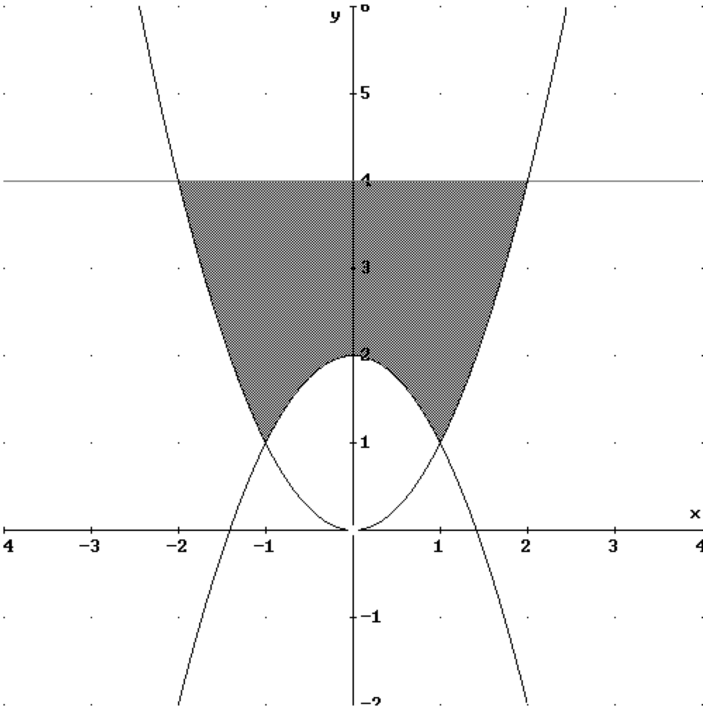
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3}{3}+x^2+C=C \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^x-x-e=1-e \end{array}\right\} \Rightarrow C=1-e$$

Luego, la función es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+1-e & si \quad x<0 \\ e^x-x-e & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Considera el recinto limitado por las siguientes curvas: $y = x^2$, $y = 2 - x^2$, $y = 4$
a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.
b) Calcula el área del recinto.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,4)$ y $(-2,4)$.

b) Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, el área que nos piden es:

$$A = 2 \cdot \left[\int_0^1 (4 - 2 + x^2)dx + \int_1^2 (4 - x^2)dx \right] = 2\left[2x + \frac{x^3}{3} \right]_0^1 + 2\left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 =$$
$$= 2\left(2 + \frac{1}{3} \right) + 2\left[\left(8 - \frac{8}{3} \right) - \left(4 - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{14}{3} + \frac{32}{3} - \frac{22}{3} = \frac{24}{3} = 8 \ u^2$$

Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\,dx$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $I=\int \ln(4-x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(4-x);\ \ du=-\dfrac{1}{4-x}dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$I=\int \ln(4-x)\,dx = x\ln|4-x|-\int\frac{-x}{4-x}dx = x\ln|4-x|+\int\frac{x}{4-x}dx$$

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int\frac{4}{4-x}dx=\int\left(-1+\frac{4}{4-x}\right)dx=-x-4\ln|4-x|$$

Con lo cual: $I=\int \ln(4-x)\,dx = x\ln|4-x|-x-4\ln|4-x|$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_{-1}^{1}\ln(4-x)\,dx=\left[x\ln|4-x|-x-4\ln|4-x|\right]_{-1}^{1}=\left(\ln 3-1-4\ln 3\right)-\left(-\ln 5+1-4\ln 5\right)=-2-3\ln 3+5\ln 5$$

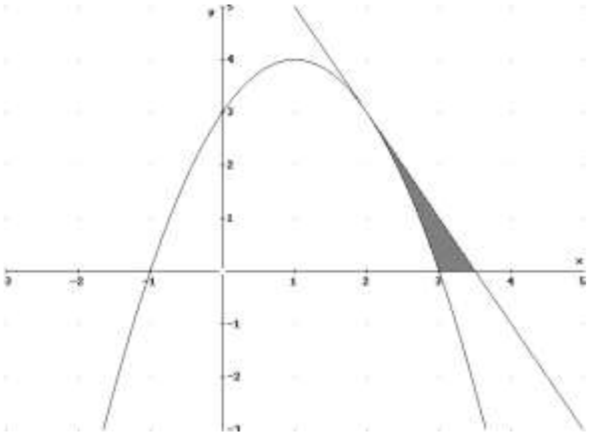
Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-x^2+2x+3$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $2x+y-7=0$ y el eje OX, calculando los puntos de corte.
c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto $x=2$, es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$
Sustituyendo los valores de $f(2)=-4+4+3=3$ y $f'(2)=-4+2=-2$, tenemos:

$$y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=-2\cdot(x-2)\Rightarrow 2x+y-7=0$$

b) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2+2x+3=0\Rightarrow x=3\ ;\ x=-1$$

$$-2x+7=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

$$-x^2+2x+3=-2x+7\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(3,0)$, $\left(\frac{7}{2},0\right)$ y $(2,3)$.

b)

$$A=\int_2^3\left[(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\right]dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx=\int_2^3(x^2-4x+4)dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^3+\left[-x^2+7x\right]_3^{\frac{7}{2}}=(9-18+12)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)+\left(-\frac{49}{4}+\frac{49}{2}\right)-(-9+21)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-3x^2-x+3$.
a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=3-x$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta del apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es tangente, en ese punto la función y la tangente coinciden, luego:

$$x^3-3x^2-x+3=3-x\Rightarrow x^3-3x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

$f(0)=3$

$f'(x)=3x^2-6x-1\Rightarrow f'(0)=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-3=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y=-x+3$

La ecuación de la recta tangente en $x=3$ es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$.

$f(3)=0$

$f'(x)=3x^2-6x-1\Rightarrow f'(3)=27-18-1=8$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)\Rightarrow y-0=8\cdot(x-3)\Rightarrow y=8x-24$

Luego, el punto es: $(0,3)$

b) Ya hemos visto que los puntos de corte de las dos funciones son: $x=0$ y $x=3$. Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y 3, y vemos cuál tiene mayor valor.

Para $x=1\Rightarrow y=(1)^3-3(1)^2-1+3=0$
Para $x=1\Rightarrow y=-1+3=2$

Por lo tanto, la función que va por encima es $y=-x+3$. Luego el área vendrá dada por:

$$A=\int_0^3\left[(-x+3)-(x^3-3x^2-x+3)\right]dx=\int_0^3(-x^3+3x^2)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}\ u^2$$

Sea $f:(-1,3)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=-1\Rightarrow 8=-4A\Rightarrow A=-2$$
$$x=3\Rightarrow 12=4B\Rightarrow B=3$$

Con lo cual:

$$\int\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}\,dx=\int\frac{-2}{x+1}\,dx+\int\frac{3}{x-3}\,dx=-2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C$$

Como tiene que pasar por el punto $(1,0)$

$$0=-2\ln|1+1|+3\ln|1-3|+C\Rightarrow C=2\ln 2-3\ln 2=-\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $-2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\ln 2$

Calcula $\displaystyle\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ **(Sugerencia: cambio de variable** $t=\sqrt{x}$ **)**

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{1}{2x(x+\sqrt{x})}dx=\int \frac{2t}{2t^2(t^2+t)}dt=\int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}=\frac{A\cdot t(t+1)+B\cdot(t+1)+C\cdot t^2}{t^2(t+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $t=1$

$$t=0\Rightarrow 1=B$$
$$t=-1\Rightarrow 1=C$$
$$t=1\Rightarrow 1=2A+2B+C \Rightarrow A=-1$$

Con lo cual:

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)}=\int \frac{-1}{t}\ dt+\int \frac{1}{t^2}\ dt+\int \frac{1}{t+1}\ dt=-\ln t-\frac{1}{t}+\ln(t+1)+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$I=-\ln t-\frac{1}{t}+\ln(t+1)+C=-\ln\left|\sqrt{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{x}\cdot\cos x$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
b) Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,0)$
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$

$$f(0)=1$$
$$f'(x)=e^{x}\cdot\cos x-e^{x}\cdot sen\,x\Rightarrow f'(0)=1$$

Luego la recta tangente en $x=0$ es $y-1=1\cdot(x-0)\Rightarrow y=x+1$

b) Es una integral por partes cíclica

$$\int e^{x}\cdot\cos x\,dx=e^{x}sen\,x-\int e^{x}\cdot senx\,dx=$$
$$=e^{x}sen\,x-\left[-e^{x}\cos x+\int e^{x}\cos xdx\right]=e^{x}sen\,x+e^{x}\cos x-\int e^{x}\cos xdx$$

$$2\int e^{x}\cdot\cos x\,dx=e^{x}sen\,x+e^{x}\cos x\Rightarrow\int e^{x}\cdot\cos x\,dx=\frac{e^{x}sen\,x+e^{x}\cos x}{2}+C$$

$u=e^{x};\ du=e^{x}\ dx$ $dv=\cos x\,dx;\ v=senx$	$u=e^{x};\ du=e^{x}\ dx$ $dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x$

Como pasa por el origen de coordenadas:

$$0=\frac{1}{2}+C\Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

Luego, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{e^{x}sen\,x+e^{x}\cos x}{2}-\dfrac{1}{2}$

Calcula $\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-x-2}dx=\frac{1}{2}\left[x\right]_0^1+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0\Rightarrow x=2\ ;\ x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=2\Rightarrow 4=3A\Rightarrow A=\frac{4}{3}$$
$$x=-1\Rightarrow 1=-3B\Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

Con lo cual:

$$I_1=\int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{x-2}\,dx+\int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx=\left[\frac{4}{3}\ln|\,x-2\,|\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}\ln|\,x+1\,|\right]_0^1=-\frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 2=-\frac{5}{3}\ln 2$$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3}\ln 2\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\ln 2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$. (Sugerencia: integración por partes).

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx$, que es una integral por partes.

$u = x;\ \ du = dx$

$dv = \frac{dx}{\cos^2 x};\ v = tg\ x$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\,tg\ x - \int tg\ x\,dx = x\,tg\ x - \int \frac{sen\,x}{\cos x}\,dx = x\,tg\ x + \ln|\cos x|$$

Calculamos la integral definida que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \left[x\,tg\ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\,dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen\,x}{\cos x}\,dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$