Considera las rectas *r* y *s* de ecuaciones:

$$x-1=y=1-z \quad \text{y} \quad \begin{cases} x-2y=-1 \\ y+z=\ \ 1 \end{cases}$$

a) Determina su punto de corte.
b) Halla el ángulo que forma *r* y *s*.
c) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Resolvemos el sistema formado por las cuatro ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=1-z \\ x-2y=-1 \\ y+z=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=3\ ;\ y=2\ ;\ z=-1$$

Luego, el punto de corte es: $(3,2,-1)$

b) Pasamos las dos rectas a paramétricas.

$$x-1=y=1-z \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+y \\ y=y \\ z=1+y \end{array}\right\} \Rightarrow A=(1,0,1)\ ;\ \vec{u}=(1,1,-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x-2y=-1 \\ y+z=\ \ 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1+2y \\ y=y \\ z=1-y \end{array}\right\} \Rightarrow B=(-1,0,1)\ ;\ \vec{v}=(2,1,-1)$$

El ángulo que forman *r* y *s* es el ángulo que forman sus vectores directores, luego:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{2+1+1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}}=\frac{4}{\sqrt{18}}=0'9428 \Rightarrow \alpha=19'47^{\circ}$$

c) El plano viene definido por el punto *A* y los vectores directores de las rectas, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ y & 1 & 1 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y+z-1=0$$

Los puntos $P(2,0,0)$ y $Q(-1,12,4)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice S pertenece a la recta r de ecuación $\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases}$.
a) Calcula las coordenadas del punto *S* sabiendo que *r* es perpendicular a la recta que pasa por *P* y *S*.
b) Comprueba si el triángulo es rectángulo.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la ecuación de la recta a paramétricas.

$$\begin{cases} 4x+3z=33 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=\dfrac{33-3z}{4} \\ y=0 \\ z=z \end{array}\right\}$$

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $S=\left(\dfrac{33-3t}{4},0,t\right)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{PS}=\left(\dfrac{33-3t}{4}-2,0,t-0\right)=\left(\dfrac{25-3t}{4},0,t\right)$. Este vector es perpendicular al vector director de la recta, luego, su producto escalar vale cero.

$$\vec{u}\cdot\overrightarrow{PS}=0\Rightarrow\left(-\frac{3}{4},0,1\right)\cdot\left(\frac{25-3t}{4},0,t\right)=0\Rightarrow-\frac{75}{16}+\frac{9t}{16}+t=0\Rightarrow t=3$$

Luego, el punto S tiene de coordenadas $S=\left(\dfrac{33-9}{4},0,3\right)=(6,0,3)$

b) Calculamos el vector $\overrightarrow{PQ}=(-3,12,4)$.

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PS}=(-3,12,4)\cdot(4,0,3)=0\Rightarrow$ Son perpendiculares, luego, el triángulo es rectángulo en P.

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección del plano $6x+3y+2z=6$ con los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(1,0,0)$; $B=(0,2,0)$; $C=(0,0,3)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,2,0)$ y $\vec{AC}=(-1,0,3)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 6\vec{i}+3\vec{j}+2\vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\, módulo\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{6^2+3^2+2^2}=\frac{7}{2}\,u^2$$

Sean los puntos $A(1,1,1)$, $B(-1,2,0)$, $C(2,1,2)$ y $D(t,-2,2)$
a) Determina el valor de *t* para que *A*, *B*, *C* y *D* estén en un mismo plano.
b) Halla la ecuación de un plano perpendicular al segmento determinado por *A* y *B*, que contenga al punto *C*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación del plano que pasa por *A*, *B* y *C*. Para ello calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,1,-1)$ y $\vec{AC}=(1,0,1)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = x-1-y+1-z+1+2y-2=0 \Rightarrow x+y-z-1=0$$

Para que el punto *D* pertenezca al plano debe verificar la ecuación, luego:

$$x+y-z-1=0 \Rightarrow t-2-2-1=0 \Rightarrow t=5$$

b) Si es perpendicular al segmento *AB*, entonces el vector normal del plano es el vector $\vec{AB}=(-2,1,-1)$, luego, el plano tiene de ecuación: $-2x+y-z+D=0$.

Como queremos que pase por el punto *C*, debe verificar esa ecuación.

$$-2x+y-z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 2+1-2+D=0 \Rightarrow D=5$$

Luego el plano pedido es: $-2x+y-z+5=0$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(-1,2,4)$ y la recta *r* definida por $\frac{x+2}{2}=y-1=\frac{z-1}{3}$
a) Determina la ecuación del plano formado por los puntos que equidistan de *A* y de *B*.
b) Halla la ecuación del plano paralelo a *r* y que contiene a los puntos *A* y *B*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector $\vec{AB}=(-2,2,2)$ y hallamos el punto medio del segmento AB, $M=(0,1,3)$.

El plano perpendicular tiene de ecuación: $-2x+2y+2z+D=0$ y como tiene que pasar por el punto *M*, tenemos:

$$-2x+2y+2z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 0+2\cdot 1+2\cdot 3+D=0 \Rightarrow D=-8$$

Luego, el plano pedido es: $-2x+2y+2z-8=0 \Rightarrow -x+y+z-4=0$

b) Calculamos la recta que pasa por *A* y *B*: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y-1=0 \\ x+z-3=0 \end{array}\right\}$

Hallamos el haz de planos que contiene a dicha recta:

$$x+y-1+k(x+z-3)=0 \Rightarrow (1+k)x+y+kz-1-3k=0$$

El vector normal de dicho plano debe ser perpendicular al vector director de la recta *r*, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$(1+k,1,k)\cdot(2,1,3)=0 \Rightarrow 2+2k+1+3k=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

Luego, el plano pedido es:

$$x+y+1+k(x+z-3)=0 \Rightarrow x+y-1-\frac{3}{5}(x+z-3)=0 \Rightarrow 2x+5y-3z+4=0$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,2)$
a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices *A, B, C* y *D*.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por *D* y es perpendicular al plano que contiene a los puntos *A, B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(-1,-3,1)$; $\overrightarrow{AC}=(-2,-1,1)$ y $\overrightarrow{AD}=(1,-2,1)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|-5\right|=\frac{5}{6}\,u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\,\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}=(-2,-1,-5)$$

La recta que nos piden es: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z-2}{-5}$

Considera los puntos $A(1,2,1)$ y $B(-1,0,3)$.
a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento *AB* en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano perpendicular al segmento *AB* y que pasa por *A*.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)

Calculamos el vector: $\vec{AB}=(-2,-2,2)$. Según la figura, se cumple que:

$$\vec{AM}=\frac{1}{3}\vec{AB}=\left(-\frac{2}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)=(x-1,y-2,z-1)\Rightarrow M=\left(1-\frac{2}{3},2-\frac{2}{3},1+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{3}\right)$$

El punto *N* es el punto medio del segmento *MB*, luego:

$$N=\left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2},\frac{\frac{4}{3}+0}{2},\frac{\frac{5}{3}+3}{2}\right)=\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{7}{3}\right)$$

b) El vector normal del plano es $\vec{AB}=(-2,-2,2)$, luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares al segmento *AB* es: $-2x-2y+2z+D=0$.
Como queremos el plano que pasa por el punto *A*, se debe verificar que:

$$-2\cdot 1-2\cdot 2+2\cdot 1+D=0\Rightarrow D=4$$

Luego, el plano pedido es: $-2x-2y+2z+4=0\Rightarrow -x-y+z+2=0$

Considera el plano π definido por $2x - y + nz = 0$ y la recta r dada por $\dfrac{x-1}{m} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{z-1}{2}$ con $m \neq 0$.
a) Calcula m y n para que la recta r sea perpendicular al plano π.
b) Calcula m y n para que la recta r esté contenida en el plano π.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector normal del plano $(2,-1,n)$ y el vector director de la recta $(m,4,2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{2}{m} = \frac{-1}{4} = \frac{n}{2} \Rightarrow m = -8 \ ; \ n = -\frac{1}{2}$$

b) Si la recta está contenida en el plano, el punto $A = (1,0,1)$ de la recta debe pertenecer al plano, luego:

$$2 \cdot 1 - 0 + n \cdot 1 = 0 \Rightarrow n = -2$$

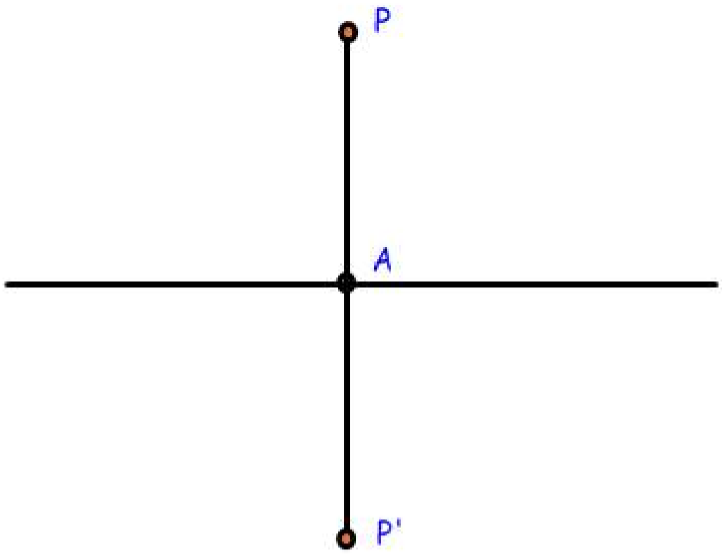
Además, si la recta está contenida en el plano, el vector normal del plano $(2,-1,n)$ y el vector director de la recta $(m,4,2)$, son perpendiculares, luego:

$$(2,-1,-2) \cdot (m,4,2) = 0 \Rightarrow 2m - 4 - 4 = 0 \Rightarrow m = 4$$

Halla el punto simétrico de $P(1,1,1)$ respecto de la recta r de ecuación $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-1}$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



De la recta r sabemos: $A=(1+2t,3t,-1-t)$; $\vec{u}=(2,3,-1)$

Para calcular el simétrico del punto $P=(1,1,1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PA}=(2t,3t-1,-2-t)$ y el vector $\vec{u}=(2,3,-1)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PA}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(2t,3t-1,-2-t)\cdot(2,3,-1)=0\Rightarrow 4t+9t-3+2+t=0\Rightarrow t=\frac{1}{14}\Rightarrow A=\left(\frac{16}{14},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)$$

El punto simétrico cumple que:

$$\frac{P+P'}{2}=A\Rightarrow\left(\frac{1+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(\frac{16}{14},\frac{3}{14},-\frac{15}{14}\right)\Rightarrow P'=\left(\frac{9}{7},-\frac{4}{7},-\frac{22}{7}\right)$$

Sean los puntos $A(2,\lambda,\lambda)$, $B(-\lambda,2,0)$ y $C(0,\lambda,\lambda-1)$.
a) ¿Existe algún valor de $\lambda\in\mathbb{R}$ para el que los puntos *A, B* y *C* estén alineados?. Justifica la respuesta.
b) Para $\lambda=1$ halla la ecuación del plano que contiene al triángulo de vértices *A, B* y *C*. Calcula la distancia del origen de coordenadas a dicho plano.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Para que los puntos estén alineados, las coordenadas de los vectores $\vec{AB}=(-\lambda-2,2-\lambda,-\lambda)$ y $\vec{AC}=(-2,0,-1)$, deben ser proporcionales, luego:

$$\frac{-2}{-\lambda-2}=\frac{0}{2-\lambda}=\frac{-1}{-\lambda}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{-2}{-\lambda-2}=\dfrac{0}{2-\lambda}\Rightarrow\lambda=2\\ \dfrac{0}{2-\lambda}=\dfrac{-1}{-\lambda}\Rightarrow\lambda=2\end{array}\right\}\Rightarrow\lambda=2$$

b) El plano viene definido por el punto $A=(2,1,1)$ y los vectores $\vec{AB}=(-3,1,-1)$ y $\vec{AC}=(-2,0,-1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix}x-2 & -3 & -2\\ y-1 & 1 & 0\\ z-1 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+2+2y-2+2z-2-3y+3=0\Rightarrow -x-y+2z+1=0$$

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|-1\cdot 0-1\cdot 0+2\cdot 0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}}=\frac{1}{\sqrt{6}}\ u$$

Halla la ecuación del plano que es paralelo a r de ecuaciones $\begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases}$ y contiene a la recta s definida por $\begin{cases} x=1-5\lambda \\ y=-2+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $r \equiv \begin{cases} x-2y+11=0 \\ 2y+z-19=0 \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-11+2y \\ y=y \\ z=19-2y \end{cases}$

La recta r, viene definida por el punto $A=(-11,0,19)$ y el vector director $\vec{u}=(2,1,-2)$. La recta s, viene definida por el punto $B=(1,-2,2)$ y el vector director $\vec{v}=(-5,3,2)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto B y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & 2 & -5 \\ y+2 & 1 & 3 \\ z-2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 8x+6y+11z-18=0$$

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones

$$x+y=1 \quad , \quad ay+z=0 \quad \text{y} \quad x+(1+a)y+az=a+1$$

a) ¿Cuánto ha de valer *a* para que no tengan ningún punto en común?.
b) Para $a=0$, determina la posición relativa de los planos.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}=a^2-a=0 \Rightarrow a=1\ ;\ a=0$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$a=0$	2	2	S. Compatible Indeterminado
$a=1$	2	3	S. Incompatible
$a\neq 0\ y\ 1$	3	3	S. Compatible Determinado

a) Para que los tres planos no tengan ningún punto en común tiene que ser $a=1$.

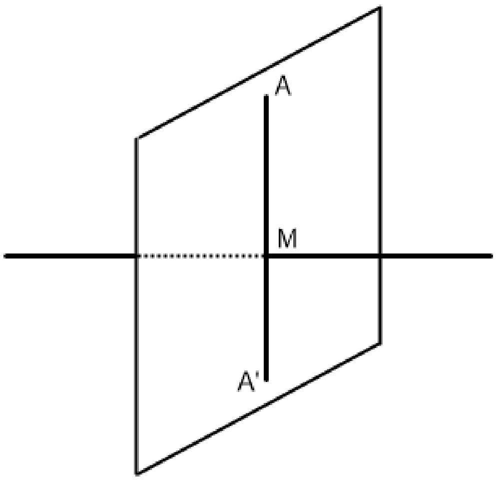
b) Para $a=0$, dos planos son coincidentes y el tercero los corta.

Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$, respecto de la recta r de ecuaciones: $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=-1+2t \end{array}\right\}$

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,2,2)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x+2y+2z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $A(-3,1,6)$

$$-3+2\cdot 1+2\cdot 6+D=0\Rightarrow D=-11\Rightarrow x+2y+2z-11=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t)+2(-3+2t)+2(-1+2t)-11=0\Rightarrow t=2$
luego las coordenadas del punto M son: $x=1+2=3; y=-3+4=1; z=-1+4=3$

Como el punto M es el punto medio del segmento $A\,A'$, si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto A', se debe verificar que: $\dfrac{-3+a}{2}=3; a=9$; $\dfrac{1+b}{2}=1; b=1$; $\dfrac{6+c}{2}=3; c=0$
Luego, el punto simétrico es: $(9,1,0)$.

Considera los puntos $A=(1,0,-1)$ y $B=(2,1,0)$ y la recta *r* dada por $\left\{\begin{array}{l} x+y=1 \\ x+z=2 \end{array}\right.$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a *r* y pasa por *A* y *B*.

b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P=(1,2,1)$ y $Q=(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta *r*.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-1) = \vec{u}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto *A*, el vector $\vec{AB}=(1,1,1)$ y el vector $\vec{u}=(1,-1,-1)$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y-2z-2=0 \Rightarrow y-z-1=0$$

b) Si la recta que pasa por *P* y *Q* está contenida en el plano eso quiere decir que los puntos *P* y *Q* son del plano. Vemos que el punto *P* si verifica la ecuación del plano, pero el punto *Q* no la verifica, luego, la recta que pasa por *P* y *Q* no está contenida en el plano.

$$2-1-1=0 \Rightarrow P \text{ está en el plano}$$

$$4-1-1 \neq 0 \Rightarrow Q \text{ no está en el plano}$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

a) Halla un punto *C* de la recta de ecuación $\frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=z$ que verifica que el triángulo de vértices *A*, *B* y *C* tiene un ángulo recto en *B*.

b) Calcula el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *D*, donde *D* es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z=6$ con el eje OX.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si pasamos la recta a paramétricas, cualquier punto C tendrá de coordenadas $C=(1+3t,2t,t)$.

Como el triángulo es rectángulo en *B*, los vectores $\overrightarrow{BA}=(0,-2,3)$ y $\overrightarrow{BC}=(3t,2t-2,t+1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=(0,-2,3)\cdot(3t,2t-2,t+1)=-4t+4+3t+3=0\Rightarrow t=7$$

Luego, el punto C tiene de coordenadas $C=(1+3t,2t,t)=(22,14,7)$

b) Calculamos el punto de corte del plano con el eje OX, que será: $D=(3,0,0)$

Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(0,2,-3)$ y $\overrightarrow{AD}=(2,0,-2)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & -3 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}=-4\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\,\textit{módulo}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{68}}{2}\ u^2$$

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$3x - y + z - 4 = 0 \ , \ x - 2y + z - 1 = 0 \ \ y \ \ x + z - 4 = 0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,-1)$, es paralela a π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos a paramétricas la recta intersección de los planos π_2 y π_3.

$$\left.\begin{aligned} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 - t \\ y = \dfrac{3}{2} \\ z = t \end{cases}$$

Luego, cualquier punto *A* de la recta tiene de coordenadas $A(4-t,\frac{3}{2},t)$.

La recta que nos piden pasa por *P* y *A*, y tiene que ser paralela al plano π_1, luego el vector normal del plano $\vec{n} = (3,-1,1)$ y el vector $\vec{PA} = (1-t,\frac{1}{2},t+1)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{n} \cdot \vec{PA} = (3,-1,1) \cdot (1-t,\frac{1}{2},t+1) = 3 - 3t - \frac{1}{2} + t + 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{7}{4}$$

El vector de la recta es: $\vec{PA} = (1-\frac{7}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{4}+1) = \left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right)$.

Por lo tanto, la recta que nos piden es: $\dfrac{x-3}{-\frac{3}{4}} = \dfrac{y-1}{\frac{1}{2}} = \dfrac{z+1}{\frac{11}{4}}$

Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ y $P(1,-1,1)$, y la recta r definida por $\left.\begin{array}{r} x-y-2=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$

a) Halla los puntos de la recta r cuya distancia al punto P es de 3 unidades.
b) Calcula el área del triángulo ABP.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x-y-2=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\}$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas $C=(2+t,t,0)$. Calculamos el módulo del vector $\vec{PC}=(1+t,t+1,-1)$ y lo igualamos a 3.

$$\left|\vec{PC}\right| = \sqrt{(1+t)^2+(t+1)^2+(-1)^2} = 3 \Rightarrow t^2+2t-3=0 \Rightarrow t=1\ ;\ t=-3$$

Luego, los puntos son: $C_1=(3,1,0)$; $C_2=(-1,-3,0)$.

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,0,1)$ y $\vec{AP}=(0,-1,1)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\, módulo\left(\vec{AB}\wedge\vec{AP}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

Dados el punto $P(1,1,-1)$, y la recta r de ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a *r* y pasa por *P*.

b) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a *r* y pasa por *P*.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left.\begin{array}{l} x+z=1 \\ y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1-t \\ y=-t \\ z=t \end{array}\right\}$

La recta pasa por el punto y su vector director es $\vec{u}=(-1,-1,1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(1,0,0)$, el vector $\vec{u}=(-1,-1,1)$ y el vector $\overrightarrow{AP}=(0,1,-1)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y+z=0$$

b) La recta pasa por el punto $P=(1,1,-1)$ y su vector director es $\vec{v}=(a,b,c)$.

Como la recta es perpendicular a *r*, el producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -a-b+c=0$.

Además la recta está contenida en el plano $y+z=0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n}=(0,1,1)$ y el vector $\vec{v}=(a,b,c)$, también es cero, luego: $b+c=0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} -a-b+c=0 \\ b+c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=(2c,-c,c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a *c* el valor 1, la recta será:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$$

Sea el punto $P(2,3,-1)$, y la recta *r* dada por las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*.
b) Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r* y determina el punto simétrico de *P* respecto de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta $\vec{u}=\vec{n}=(0,-2,1)$. Luego, todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-2y+z+D=0$. Nos interesa el que pasa por $P=(2,3,-1)$, luego su ecuación será: $-2\cdot 3-1+D=0 \Rightarrow D=7 \Rightarrow -2y+z+7=0$

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano. Para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano.

$$-2y+z+7=0 \Rightarrow -2\cdot(-2\lambda)+\lambda+7=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(1,-2\cdot\left(-\frac{7}{5}\right),-\frac{7}{5}\right)=\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM}=\left(-1,-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$

$$d=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{5}}\ u$$

M es el punto medio del segmento *PP*', siendo *P*' el simétrico, luego:

$$M=\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{3+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right) \Rightarrow a=0\ ;\ b=\frac{13}{5}\ ;\ c=-\frac{9}{5}$$

Luego, el simétrico es: $P'=\left(0,\frac{13}{5},-\frac{9}{5}\right)$

Considera los planos π_1 y π_2 dados, respectivamente, por las ecuaciones

$$(x,y,z)=(-2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\mu(0,1,-1) \quad \text{y} \quad 2x+y-z+5=0$$

Determina los puntos de la recta *r* definida por $x=y+1=\frac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos el plano π_1 a forma general:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 \\ y & -2 & 1 \\ z-7 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x+y+z-3=0$$

Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas: $A=(t,-1+t,1-3t)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|2t-1+t+1-3t-3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|2t-1+t-1+3t+5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} \Rightarrow |-3|=|6t+3| \Rightarrow t=0 \ ; \ t=-1$$

Luego, los puntos son: si $t=0 \Rightarrow A=(0,-1,1)$; $t=-1 \Rightarrow A=(-1,-2,4)$

Dada la recta *r* definida por $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3$, y la recta *s* definida por $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{array}\right\}$
a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a implícitas: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=10 \\ y+2z=5 \end{array}\right\}$

Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a *r*.

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0 \Rightarrow 0+0-10+k(0+0-5)=0 \Rightarrow k=-2$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es: $x+3z-10-2(y+2z-5)=0 \Rightarrow x-2y-z=0$.

b) Calculamos la ecuación de todos los planos que contienen a s.

$$x-1+k(2y-z+2)=0 \Rightarrow x+2ky-kz-1+2k=0$$

Como queremos que sea paralelo a r, el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2k,-k)$ y el vector director de la recta $\vec{u}=(3,2,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=(3,2,-1)\cdot(1,2k,-k)=3+4k+k=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que nos piden es: $x+2ky-kz-1+2k=0 \Rightarrow 5x-6y+3z-11=0$

Dada la recta *r* definida por $\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z$ y la recta *s* definida por $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r\equiv\begin{cases} x=-7+2t \\ y=7-t \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A=(-7+2t,7-t,t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B=(2,-5,s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(9-2t,-12+t,s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow(9-2t,-12+t,s-t)\cdot(2,-1,1)=0\Rightarrow 30-6t+s=0$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow(9-2t,-12+t,s-t)\cdot(0,0,1)=0\Rightarrow s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=6$; $s=6$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(5,1,6) \ ; \ B=(2,-5,6)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A=(5,1,6)$ y $\vec{AB}=(-3,-6,0)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-5}{-3}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-6}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}=(-3,-6,0)$

$$d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+0}=\sqrt{45}\ u$$

Considera los puntos $A(-1,k,3), B(k+1,0,2), C(1,2,0)$ y $D(2,0,1)$.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}$ y $\vec{CD}$ sean linealmente dependientes?.

b) Calcula los valores de k para los que los puntos A, B, C y D forman un tetraedro de volumen 1.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (k+2, -k, -1)$; $\vec{BC} = (-k, 2, -2)$; $\vec{CD} = (1, -2, 1)$. Para que sean linealmente dependientes, su determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -k^2 - 2k - 2 = 0 \Rightarrow \text{ No tiene solución real}$$

Luego, no hay ningún valor de k para el que los vectores sean linealmente dependientes.

b) Calculamos los vectores: $\vec{AB} = (k+2, -k, -1)$; $\vec{AC} = (2, 2-k, -3)$; $\vec{AD} = (3, -k, -2)$.

$$V = 1 = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \left| -k^2 - 2k - 2 \right| \Rightarrow \left| -k^2 - 2k - 2 \right| = 6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k^2 - 2k - 2 = 6 \Rightarrow No \\ -k^2 - 2k - 2 = -6 \Rightarrow k = -1 \pm \sqrt{5} \end{cases}$$

Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{cases}$

a) Halla el punto de intersección del plano π y la recta *r*.

b) Halla el punto simétrico del punto $Q=(1,-2,3)$ respecto del plano π.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

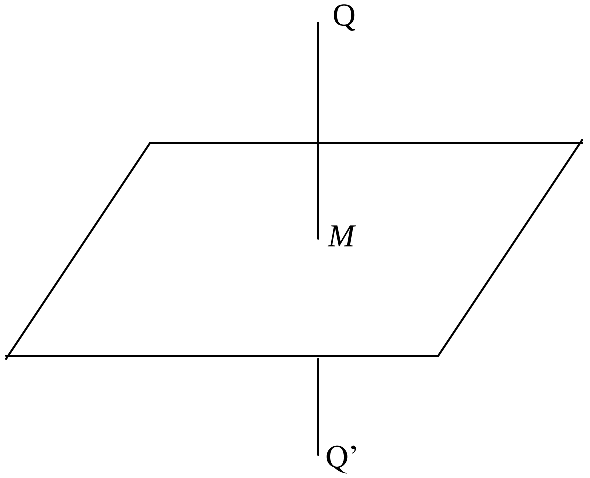
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2\ ;\ y=1\ ;\ z=4$$

Luego, el punto de intersección es $(2,1,4)$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto Q es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,2,-1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+2t \\ z=3-t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t)+2\cdot(-2+2t)-(3-t)=0 \Rightarrow t=1$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $x=2; y=0; z=2$

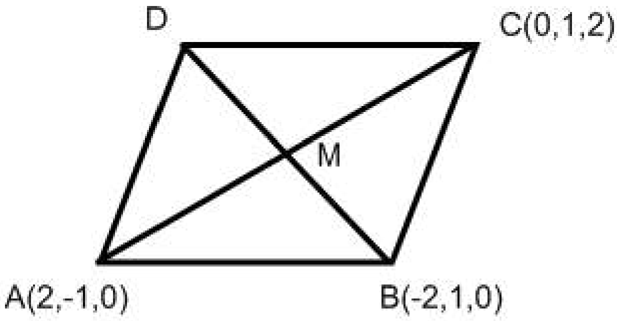
Como el punto *M* es el punto medio del segmento Q *Q'*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto Q*'*, se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2}=2; a=3\ ;\ \frac{b-2}{2}=0; b=2\ ;\ \frac{c+3}{2}=2; c=1$$

Luego, el punto simétrico es el $Q'(3,2,1)$

De un paralelogramo *ABCD* conocemos tres vértices consecutivos: $A(2,-1,0)$, $B(-2,1,0)$ y $C(0,1,2)$.
a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.
b) Halla el área de dicho paralelogramo.
c) Calcula el vértice D.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos las coordenadas del centro del paralelogramo: $M=\dfrac{A+C}{2}=(1,0,1)$. Calculamos el vector normal al plano:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{BA}=(4,-2,0)\\ \vec{BC}=(2,0,2)\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & -2 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=(-4,-8,4)$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\dfrac{x-1}{-4}=\dfrac{y}{-8}=\dfrac{z-1}{4}$

b) El área del paralelogramo es:

$$\acute{A}rea = m\acute{o}dulo\ \left|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{(-4)^2+(-8)^2+(4)^2}=\sqrt{96}\ u^2$$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{D+B}{2}\Rightarrow (1,0,1)=\frac{(a,b,c)+(-2,1,0)}{2}\Rightarrow D=(4,-1,2)$$

Sean r y s las rectas dadas por: $r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases}$ **y** $s \equiv \dfrac{x-1}{-1} = \dfrac{y+1}{6} = \dfrac{z}{2}$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.
b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.
MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z=6 \\ x+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3-t \\ y=3+2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow A(3,3,0) \; ; \; \vec{u}(-1,2,1)$$

$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} \Rightarrow B=(1,-1,0) \; ; \; \vec{v}=(-1,6,2)$$

a) Para determinar el punto de corte de las dos rectas resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

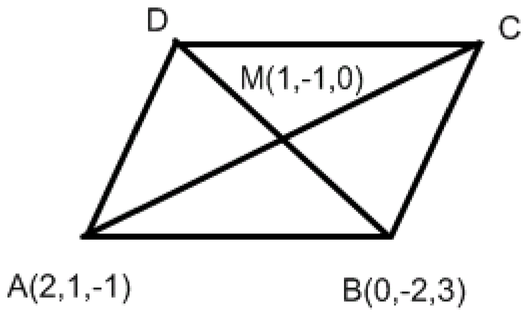
$$\frac{3-t-1}{-1} = \frac{3+2t+1}{6} = \frac{t}{2} \Rightarrow t=4 \Rightarrow \text{ el punto de corte es: } (-1,11,4)$$

b) El plano viene definido por el punto A y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ y-3 & 2 & 6 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+y-4z+3=0$$

El punto $M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$ son dos vértices consecutivos del mismo.
a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Con el punto M y los vectores $\vec{MA}=(1,2,-1)$ y $\vec{MB}=(-1,-1,3)$ calculamos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5x-2y+z-7=0$$

b) Calculamos las coordenadas del vértice C

$$M=\frac{A+C}{2} \Rightarrow (1,-1,0)=\frac{(2,1,-1)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow C=(0,-3,1)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{B+D}{2} \Rightarrow (1,-1,0)=\frac{(0,-2,3)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow D=(2,0,-3)$$

Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,-3,4)$ y $\vec{AD}=(0,-1,-2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AD}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}=(10,-4,2)$$

$$Área = módulo\ \left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(10)^2+(-4)^2+(2)^2}=\sqrt{120}\ u^2$$

Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 2x-3y-z=0 \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$Eje\ OX \equiv \begin{cases} A=(0,0,0) \\ \vec{u}=(1,0,0) \end{cases} \quad ; \quad r \equiv \begin{cases} 2x=4+3y \\ 2x-z=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+\dfrac{3}{2}y \\ y=y \\ z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(2,0,4) \\ \vec{u}=\left(\dfrac{3}{2},1,0\right) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|}=\left|\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{módulo\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}}\right|=\frac{4}{\sqrt{1}}=4\ u$$

Dadas las rectas $r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4}$ **y** $s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$

a) Determina la posición relativa de las recta *r* y *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores de la rectas son paralelos, luego las rectas son paralelas.

b) Calculamos el plano perpendicular a s: $3x-2y-2z+D=0$, y queremos que pase por el punto $A=(-3,9,8)$ de la recta r.

$$3x-2y-2z+D=0 \Rightarrow 3\cdot(-3)-2\cdot(9)-2\cdot(8)+D=0 \Rightarrow D=43$$

Luego, el plano es: $3x-2y-2z+43=0$.

Calculamos el punto de corte de la recta s con el plano:

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3+3t \\ y = 9-2t \\ z = 8-2t \end{cases}$$

$$3x-2y-2z+43=0 \Rightarrow 3\cdot(3+3t)-2\cdot(9-2t)-2\cdot(8-2t)+43=0 \Rightarrow t=-\frac{18}{17}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(3-3\frac{18}{17}, 9+2\frac{18}{17}, 8+2\frac{18}{17}\right) = \left(-\frac{3}{17}, \frac{189}{17}, \frac{172}{17}\right)$

La distancia entre las dos rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = \left(\frac{48}{17}, \frac{36}{17}, \frac{36}{17}\right)$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas. Calculamos el módulo del vector y lo igualamos a 3.

$$\left|\vec{AM}\right| = \sqrt{\left(\frac{48}{17}\right)^2 + \left(\frac{36}{17}\right)^2 + \left(\frac{36}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4896}{289}} = \sqrt{\frac{288}{17}}\ u$$

Los puntos $A(1,1,5)$ y $B(1,1,2)$ son vértices consecutivos de un rectángulo *ABCD*. El vértice *C*, consecutivo a *B*, está en la recta $x=\frac{y-6}{-2}=\frac{z+1}{2}$. Determina los vértices *C* y *D*.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $x=\frac{y-6}{-2}=\frac{z+1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=t\\ y=6-2t\\ z=-1+2t\end{cases}$, luego, el vértice C tiene de coordenadas $C(t,6-2t,-1+2t)$.

Los vectores $\vec{AB}(0,0,-3)$ y $\vec{BC}(1-t,-5+2t,3-2t)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar vale 0.

$$\vec{AB}\cdot\vec{BC}=(0,0,-3)\cdot(1-t,-5+2t,3-2t)=-9+6t=0\Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

El vértice *C* tiene de coordenadas: $C(t,6-2t,-1+2t)=\left(\frac{3}{2},3,2\right)$

Como los vectores $\vec{AB}(0,0,-3)$ y $\vec{DC}\left(\frac{3}{2}-a,3-b,2-c\right)$ son iguales, las coordenadas del vértice D son: $D=\left(\frac{3}{2},3,5\right)$

Se consideran los vectores $\vec{u}=(k,1,1)$, $\vec{v}=(2,1,-2)$ y $\vec{w}=(1,1,k)$, donde k es un número real.
a) Determina los valores de k para los que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.
b) Determina los valores de k para los que $\vec{u}+\vec{v}$ y $\vec{v}-\vec{w}$ son ortogonales.
c) Para $k=-1$, determina aquellos vectores que son ortogonales a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ y tienen módulo 1.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores son linealmente dependientes si su determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

b) Calculamos los vectores $\vec{u}+\vec{v}=(2+k,2,-1)$ y $\vec{v}-\vec{w}=(1,0,-2-k)$, y como son ortogonales, su producto escalar vale cero.

$$(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{v}-\vec{w})=(2+k,2,-1)\cdot(1,0,-2-k)=2+k+2+k=4+2k=0 \Rightarrow k=-2$$

c) El vector perpendicular a $\vec{v}$ y $\vec{w}$, es su producto vectorial.

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,0,1)$$

y como tiene que ser unitario, lo dividimos por su módulo.

Luego el vector que nos piden es: $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ o, también el $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},0,-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

Encuentra los puntos de la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{2-y}{2} = z-3$ cuya distancia al plano $\pi \equiv x-2y+2z=1$ vale cuatro unidades.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $\dfrac{x-1}{4} = \dfrac{2-y}{2} = z-3 \Rightarrow \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2-2t \\ z = 3+t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas: $(1+4t, 2-2t, 3+t)$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|(1+4t)-2(2-2t)+2(3+t)-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|1+4t-4+4t+6+2t-1|}{\sqrt{9}} = \frac{|10t+2|}{3} = 4 \Rightarrow |10t+2| = 12 \Rightarrow t=1 \ ; \ t = -\frac{14}{10}$$

Luego, los puntos son: si $t=1 \Rightarrow A=(5,0,4)$; $t = -\dfrac{14}{10} \Rightarrow B = \left(-\dfrac{23}{5}, \dfrac{24}{5}, \dfrac{8}{5}\right)$

Determina un punto *P* de la recta $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$ que equidista del origen de coordenadas y del punto $A(3,2,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -3+2t \\ y = -5+3t \\ z = -4+3t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $P = (-3+2t, -5+3t, -4+3t)$.
Como este punto equidista de *O* y de *A*, se cumple que: $\left|\overrightarrow{OP}\right| = \left|\overrightarrow{AP}\right|$.

$$\overrightarrow{OP} = (-3+2t, -5+3t, -4+3t) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OP}\right| = \sqrt{(-3+2t)^2 + (-5+3t)^2 + (-4+3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 66t + 50}$$

$$\overrightarrow{AP} = (-6+2t, -7+3t, -5+3t) \Rightarrow \left|\overrightarrow{AP}\right| = \sqrt{(-6+2t)^2 + (-7+3t)^2 + (-5+3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{22t^2 - 66t + 50} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110} \Rightarrow 30t = 60 \Rightarrow t = 2$$

Luego, el punto que nos piden es: $P = (1,1,2)$.

Considera el punto $P(1,0,2)$ y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} 2x-y-4=0 \\ y+2z-8=0 \end{cases}$.

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r.
b) Calcula el punto simétrico de P respecto de la recta r.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 6-t \\ y = 8-2t \\ z = t \end{cases}$. El vector director de la recta $(-1,-2,1)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$-x-2y+z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(1,0,2)$.

$$-x-2y+z+D=0 \Rightarrow -1-2\cdot 0+2+D=0 \Rightarrow D=-1$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x-2y+z-1=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$-x-2y+z-1=0 \Rightarrow -(6-t)-2(8-2t)+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{23}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(6-\frac{23}{6}, 8-\frac{46}{6}, \frac{23}{6}\right) = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,0,2)+(a,b,c)}{2} = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right) \Rightarrow P' = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

Sean los puntos $A(0,0,1), B(1,0,-1), C(0,1,-2)$ y $D(1,2,0)$.
a) Halla la ecuación del plano π determinado por los puntos *A*, *B* y *C*.
b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.
c) Calcula la distancia del punto *D* al plano π.
MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto *A* y los vectores $\vec{AB}=(1,0,-2)$; $\vec{AC}=(0,1,-3)$. Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2x+3y+z-1=0$$

b) Si los cuatro puntos son coplanarios, el punto D debe satisfacer la ecuación del plano que hemos calculado en el apartado anterior.

$$2\cdot 1+3\cdot 2+0-1\neq 0 \Rightarrow \text{ No son coplanarios.}$$

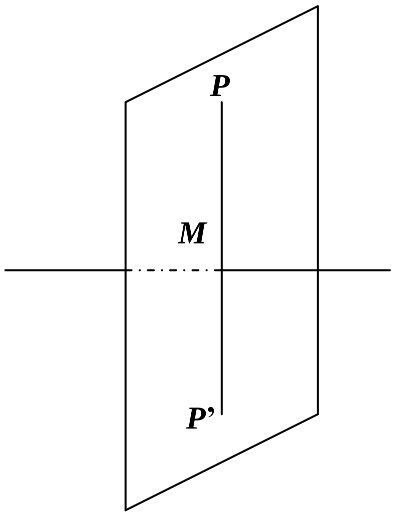
c) Calculamos la distancia

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 1+3\cdot 2+1\cdot 0-1|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}=\frac{7}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{14}}{2}\ u$$

Halla el punto simétrico de $P(2,1,-5)$ respecto de la recta *r* definida por $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto *P* es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano = vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1,-1,1)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x-y+z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $P(2,1,-5)$

$$1\cdot 2-1\cdot 1+1\cdot(-5)+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow x-y+z+4=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left.\begin{array}{l} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2-t \\ z=t \end{cases}$$

$$t+2+t+t+4=0 \Rightarrow 3t=-6 \Rightarrow t=-2$$

luego las coordenadas del punto *M* son: $M(-2,0,-2)$

Como el punto M es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*, *b*, *c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que: $\frac{2+a}{2}=-2 \Rightarrow; a=-6$; $\frac{1+b}{2}=0 \Rightarrow b=-1$; $\frac{-5+c}{2}=-2 \Rightarrow; c=1$

Luego el simétrico es: $P'=(-6,-1,1)$

Sea r la recta que pasa por el punto $(1,0,0)$ y tiene como vector dirección $(a,2a,1)$ y sea s la recta dada por: $s \equiv \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\quad 0 \end{cases}$
a) Calcula los valores de a para los que r y s son paralelas.
b) Calcula, para $a=1$, la distancia entre r y s.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta *s*.

$$s \equiv \begin{cases} -2x+y=-2 \\ -ax+z=\quad 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2+2t \\ z=at \end{cases} \Rightarrow \vec{u}\,(1,2,a)$$

Como las rectas son paralelas, las componentes de los vectores directores de ambas rectas deben ser proporcionales

$$\frac{a}{1}=\frac{2a}{2}=\frac{1}{a} \Rightarrow a=\pm 1$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A=(1,0,0)$ a la recta s. Para ello calculamos un plano perpendicular a *s* y que pase por el punto $A=(1,0,0)$

$$x+2y+z+D=0 \Rightarrow 1+2\cdot 0+0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow x+2y+z-1=0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} x+2y+z-1=0 \\ x=t \\ y=-2+2t \\ z=t \end{array}\right\} \Rightarrow t+2(-2+2t)+t-1=0 \Rightarrow 6t-5=0 \Rightarrow t=\frac{5}{6}$$

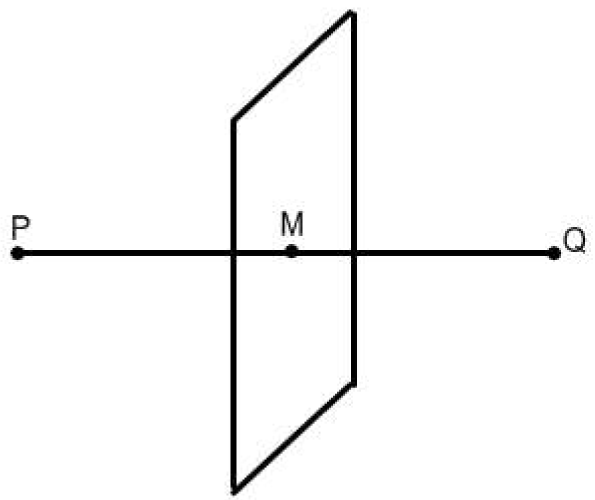
Luego, el punto de corte es el $B=\left(\frac{5}{6},-2+\frac{10}{6},\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{5}{6},-\frac{2}{6},\frac{5}{6}\right)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AB}=\left(\frac{5}{6}-1,-\frac{2}{6},\frac{5}{6}\right)=\left(-\frac{1}{6},-\frac{2}{6},\frac{5}{6}\right)$, luego:

$$d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{6}\right)^2+\left(-\frac{2}{6}\right)^2+\left(\frac{5}{6}\right)^2}=\sqrt{\frac{30}{36}}=\sqrt{\frac{5}{6}}\ u$$

Considera los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$.
a) Halla la ecuación del plano π respecto del cual P y Q son simétricos.
b) Calcula la distancia de P a π.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento *PQ* y que pasa por su punto medio *M*.



El vector $\vec{PQ} = (-2,-2,0)$ es el vector normal del plano, luego:

$$-2x-2y+D=0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M=(1,2,1)$, tenemos que el plano pedido es:

$$-2x-2y+D=0 \Rightarrow -2\cdot 1-2\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=6 \Rightarrow -2x-2y+6=0 \Rightarrow x+y-3=0$$

b) La distancia de P a π es el módulo del vector $\vec{PM}=(-1,-1,0)$, luego:

$$d(P,\pi)=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{2}\ u$$

Calcula la distancia entre las rectas: $r \equiv x = y = z$ y $s \equiv x - 1 = y - 2 = z - 3$.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{cases}$$

Vemos que las dos rectas son paralelas pues tienen el mismo vector director $\vec{u} = (1,1,1)$. Su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (0,0,0)$ de la recta r a la recta s. Para ello calculamos un plano perpendicular a s y que pase por el punto $A = (0,0,0)$

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x + y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 + s \end{array}\right\} \Rightarrow 1 + s + 2 + s + 3 + s = 0 \Rightarrow 3s + 6 = 0 \Rightarrow s = -2$$

Luego, el punto de corte es el $B = (1 - 2, 2 - 2, 3 - 2) = (-1,0,1)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AB} = (-1,0,1)$, luego:

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + (0)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}\ u$$

Considera las rectas: $r \equiv x = y = z$ $\quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ $\quad t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases}$.

Halla la ecuación de la recta que corta a *r* y a *s* y es paralela a *t*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Si pasamos a paramétricas las rectas *r* y *s*, vemos que: cualquier punto de la recta *r* tiene de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta *s* tiene de coordenadas $B = (2, 1, s)$.

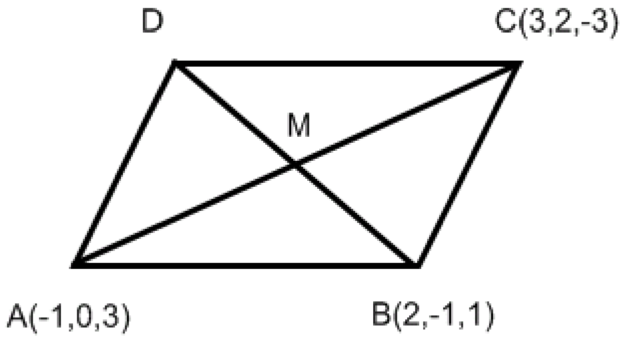
El vector $\vec{AB} = (2 - t, 1 - t, s - t)$ tiene que ser paralelo al vector director de la recta *t* $\vec{u} = (2, 3, 1)$, luego, sus componentes tienen que ser proporcionales:

$$\frac{2-t}{2} = \frac{1-t}{3} = \frac{s-t}{1} \Rightarrow t = 4 \ ; \ s = 3$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación: $\frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{3} = \frac{z-4}{1}$

Del paralelogramo $ABCD$ se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.
a) Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
b) Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.
c) Calcula las coordenadas del vértice D.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(3,-1,-2)$ y $\vec{AC}=(4,2,-6)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 3 & 4 \\ y & -1 & 2 \\ z-3 & -2 & -6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x+y+z-2=0$$

b) La recta que nos piden tiene de ecuación: $\dfrac{x+1}{4}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z-3}{-6}$

c) Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{A+C}{2}=\frac{(-1,0,3)+(3,2,-3)}{2}=(1,1,0)$$
$$M=\frac{B+D}{2}\Rightarrow (1,1,0)=\frac{(2,-1,1)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow D=(0,3,-1)$$

Considera los puntos $A(1,2,3)$ y $B(-1,0,4)$.
a) Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento *AB* en tres partes iguales.
b) Halla la ecuación del plano que pasa por el punto *A* y es perpendicular al segmento *AB*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a)

Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\vec{AB} = 3\,\vec{AM}$, y como $\vec{AB} = (-2,-2,1)$ y $\vec{AM} = (x-1, y-2, z-3)$, obtenemos: $(-2,-2,1) = (3x-3, 3y-6, 3z-9) \Rightarrow x = \frac{1}{3}; y = \frac{4}{3}; z = \frac{10}{3}$, es decir el punto *M* es $M = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

También se observa que el punto *N* es el punto medio del segmento *MB*, es decir:

$$N = \frac{M+B}{2} = \left(\frac{\frac{1}{3}-1}{2}, \frac{\frac{4}{3}+0}{2}, \frac{\frac{10}{3}+4}{2} \right) = \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{11}{3} \right)$$

b) El vector $\vec{AB} = (-2,-2,1)$ es el vector normal del plano, luego, $-2x-2y+z+D=0$. Como queremos que pase por el punto A:

$$-2x-2y+z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 1-2\cdot 2+3+D=0 \Rightarrow D=3$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2x-2y+z+3=0$

Considera los puntos $A(1,2,1)$, $B(-1,0,2)$ y $C(3,2,0)$ y el plano π determinado por ellos.
a) Halla la ecuación de la recta *r* que está contenida en π y tal que *A* y *B* son simétricos respecto de *r*.
b) Calcula la distancia de *A* a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como *A* y *B* son simétricos respecto de *r*, el punto medio *M* del segmento *AB* pertenece a la recta *r*

$$M=\frac{A+B}{2}=\left(0,1,\frac{3}{2}\right)$$

Calculamos el vector normal del plano que contiene a los tres puntos

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(2,0,4)$$

El vector director (a,b,c) de la recta *r* tiene que ser perpendicular al vector normal del plano, luego:

$$2a+4c=0$$

También tiene que ser perpendicular al vector $\vec{AB}=(-2,-2,1)$, luego: $-2a-2b+c=0$. Resolviendo el sistema formado por estas dos ecuaciones sale que: $a=-2c$; $b=\frac{5c}{2}$; $c=c$. Vemos que hay infinitas soluciones, si damos a *c* el valor 2, el vector director de la recta es: $(-4,5,2)$. Por lo tanto, la ecuación de la recta que nos piden es: $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-\frac{3}{2}}{2}$

b) La distancia de *A* a la recta *r* es el módulo del vector $\vec{AM}=\left(-1,-1,\frac{1}{2}\right)$, luego:

$$d=\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{1+1+\frac{1}{4}}=\frac{3}{2}\ u$$

Considera las rectas r y s dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2-3\lambda \\ y = 3+5\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x+y-1=0 \\ z-5=0 \end{cases}$

a) Determina la posición relativa de *r* y *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta *r*.

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-3}{5} = \frac{z}{1} \Rightarrow \begin{cases} 5x-10 = 3y-9 \\ x-2 = 3z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x-3y = 1 \\ x-3z = 2 \end{cases}$$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x+y=1 \\ z=5 \\ 5x-3y=1 \\ x-3z=2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (2,3,0) \\ \vec{u} = (-3,5,1) \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} B = (1,0,5) \\ \vec{v} = (-1,1,0) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r,s) = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})\right|}{\left|\vec{u} \wedge \vec{v}\right|} = \left| \frac{\begin{vmatrix} -1 & -3 & 5 \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\textit{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}} \right| = \frac{14}{\sqrt{6}} = 5'71u$$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z+1$ que equidista de los planos $\pi_1 \equiv x - y + 3z + 2 = 0$ y $\pi_2 \equiv \begin{cases} x = -4 + \lambda - 3\mu \\ y = 1 + \lambda \\ z = \mu \end{cases}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta r a paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$ y por tanto podemos tomar como punto genérico de la recta $P = (1+3t, 2t, -1+t)$.

Calculamos la ecuación general del plano $\pi_2 \equiv x - y + 3z + 5 = 0$

Como piden los puntos que equidistan de los planos π_1 y π_2, tenemos que $d(P, \pi_1) = d(P, \pi_2)$, luego:

$$d(P,\pi_1) = d(P,\pi_2) \Rightarrow \frac{|1+3t-2t-3+3t+2|}{\sqrt{11}} = \frac{|1+3t-2t-3+3t+5|}{\sqrt{11}} \Rightarrow \frac{|4t|}{\sqrt{11}} = \frac{|4t+3|}{\sqrt{11}} \Rightarrow |4t| = |4t+3|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$4t = -4t - 3 \Rightarrow t = -\frac{3}{8} \Rightarrow P = \left(\frac{5}{8}, -\frac{3}{4}, -\frac{11}{8}\right)$$

$$4t = 4t + 3 \Rightarrow 3 = 0 \Rightarrow \text{ Absurdo}$$

Considera los puntos $A(0,5,3)$, $B(-1,4,3)$, $C(1,2,1)$ y $D(2,3,1)$.
a) Comprueba que los cuatro puntos son coplanarios y que $ABCD$ es un rectángulo.
b) Calcula el área de dicho rectángulo.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB} = (-1,-1,0)$; $\vec{AC} = (1,-3,-2)$ y $\vec{AD} = (2,-2,-2)$

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{Los 4 puntos están en un mismo plano.}$$

Si los cuatro puntos forman un rectángulo

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AD}$ tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow -2+2=0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{BC}$ tienen que ser perpendiculares $\Rightarrow \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0 \Rightarrow -2+2=0 \Rightarrow$ Cierto

Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{DC}$ tienen que tener el mismo módulo $\Rightarrow \left|\vec{AB}\right| = \left|\vec{DC}\right| = \sqrt{2} \Rightarrow$ Cierto

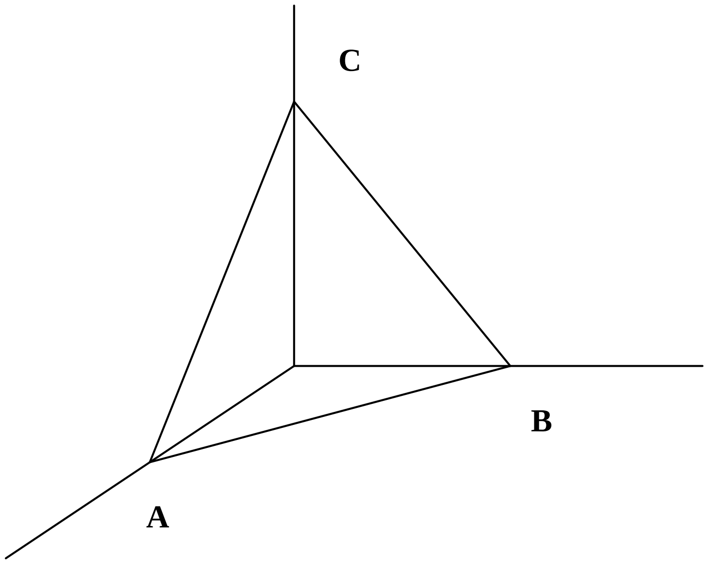
Luego forman un rectángulo.

c) Área = $\left|\vec{AB}\right| \cdot \left|\vec{AD}\right| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 4'89\ u^2$

Considera el plano π de ecuación $2x+y+3z-6=0$.
a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes coordenados.
b) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el plano π y los planos coordenados.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A=(3,0,0)$; $B=(0,6,0)$ y $C=(0,0,2)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(-3,6,0)$; $\vec{AC}=(-3,0,2)$. El área pedida es:

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\ módulo\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -3 & 6 & 0\\ -3 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{2}módulo\ (12\vec{i}+6\vec{j}+18\vec{k})=\frac{1}{2}\sqrt{504}=\sqrt{126}=3\sqrt{14}\ u^2$$

b) Calculamos los vectores $\vec{OA}=(3,0,0)$; $\vec{OB}=(0,6,0)$ y $\vec{OC}=(0,0,2)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 6 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\left|36\right|=6\ u^3$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$, $B(-1,3,1)$, $C(2,1,2)$ y $D(1,0,4)$.
a) Halla la ecuación del plano que contiene a *A*, *B* y *C*
b) Halla el punto simétrico de *D* respecto del plano $x-y-5z+9=0$.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-2,3,-1)$; $\vec{AC}=(1,1,0)$. La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -2 & 1 \\ y & 3 & 1 \\ z-2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = x-y-5z+9=0$$

b) Calculamos la ecuación de la recta que pasa por *D* y es perpendicular al plano

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-4}{-5} \Rightarrow \begin{cases} x=1+t \\ y=-t \\ z=4-5t \end{cases}$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano, sustituyendo la recta en la ecuación del plano

$$x-y-5z+9=0 \Rightarrow 1+t+t-20+25t+9=0 \Rightarrow t=\frac{10}{27}$$

luego, el punto es: $M=\left(1+\frac{10}{27},-\frac{10}{27},4-\frac{50}{27}\right)=\left(\frac{37}{27},-\frac{10}{27},\frac{58}{27}\right)$

Como el punto M es el punto medio del segmento *D D'*, si llamamos (*a*, *b*, *c*) a las coordenadas del punto *D'*, se debe verificar que:

$$\frac{1+a}{2}=\frac{37}{27} \Rightarrow a=\frac{47}{27}$$
$$\frac{0+b}{2}=-\frac{10}{27} \Rightarrow b=-\frac{20}{27}$$
$$\frac{4+c}{2}=\frac{58}{27} \Rightarrow c=\frac{8}{27}$$

Luego el simétrico es: $D'=\left(\frac{47}{27},-\frac{20}{27},\frac{8}{27}\right)$

Considera la recta *r* que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.
a) Halla la ecuación de la recta *s* paralela a *r* que pasa por $C(-2,3,2)$.
b) Calcula la distancia de *r* a *s*.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta *r*: $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$

Como las rectas son paralelas, el vector director de *s* es $\overrightarrow{AB}(-2,1,1)$, luego, la ecuación de la recta *s* es:

$$\frac{x+2}{-2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-2}{1}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-2-2t \\ y=3+t \\ z=2+t \end{array}\right\}$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A=(1,0,-1)$ a la recta s. Para ello calculamos un plano perpendicular a *s* y que pase por el punto $A=(1,0,-1)$

$$-2x+y+z+D=0\Rightarrow -2\cdot 1+1\cdot 0+1\cdot(-1)+D=0\Rightarrow D=3\Rightarrow -2x+y+z+3=0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} -2x+y+z+3=0 \\ x=-2-2t \\ y=3+t \\ z=2+t \end{array}\right\}\Rightarrow -2(-2-2t)+3+t+2+t+3=0\Rightarrow 12+6t=0\Rightarrow t=-2$$

Luego, el punto de corte es el $M=\left(-2+4,3-2,2-2\right)=\left(2,1,0\right)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AM}=\left(2-1,1-0,0+1\right)=\left(1,1,1\right)$, luego:

$$d=\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{\left(1\right)^2+\left(1\right)^2+\left(1\right)^2}=\sqrt{3}\ u$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicularmente a r en el punto $(1,1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a r.

$$x+2y-z-3+k(2x-y+z-1)=0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x+2y-z-3+k(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow 0+0+0-3+k(0+0+0-1)=0 \Rightarrow k=-3$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es:

$$x+2y-z-3-3(2x-y+z-1)=0 \Rightarrow -5x+5y-4z=0\,.$$

b) El vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=(1,-3,-5)$$

Luego, la ecuación de todos los planos perpendiculares a r es: $x-3y-5z+D=0$. Como queremos que pase por el punto $(1,1,0)$, su ecuación será:

$$x-3y-5z+D=0 \Rightarrow 1-3\cdot 1-0+D=0 \Rightarrow D=2 \Rightarrow x-3y-5z+2=0$$

Pasamos el plano de general a paramétricas:

$$x-3y-5z+2=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2+3t+5s \\ y=t \\ z=s \end{cases}$$

Sean los vectores $\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$ y $\vec{w} = (\lambda,1,0)$.

a) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean ortogonales.

b) Calcula los valores de λ que hacen que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente independientes.

c) Para λ =1 escribe el vector $\vec{r} = (3,0,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como son ortogonales, su producto escalar debe valer 0.

$$(1,-1,3)\cdot(\lambda,1,0) = \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1$$

b) El determinante formado por los tres vectores tiene que ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ \lambda & 1 & 0 \end{vmatrix} = \lambda + 3 + 1 \neq 0 \Rightarrow \lambda \neq -4$$

Luego, son independientes para todos los valores de $\lambda \neq -4$.

c) Escribimos el vector $\vec{r} = (3,0,2)$ como combinación lineal de $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$(3,0,2) = a\cdot(1,-1,3) + b\cdot(1,0,-1) + c\cdot(1,1,0) \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a+b+c=3 \\ -a+c=0 \\ 3a-b=2 \end{array}\right\} a=1 \ ; \ b=1 \ ; \ c=1$$

Luego la combinación lineal es: $\vec{r} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$

Sea r la recta dada por $\dfrac{x+2}{2}=y+1=\dfrac{z-1}{-3}$ y sea s la recta dada por $\left.\begin{matrix} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{matrix}\right\}$.

a) Determina la posición relativa de r y s.

b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a s.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$r \equiv \frac{x+2}{2}=y+1=\frac{z-1}{-3} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=-2+2t \\ y=-1+t \\ z=1-3t \end{matrix}\right\} \Rightarrow A=(-2,-1,1)\ ;\ \vec{u}=(2,1,-3)$$

$$s \equiv \left.\begin{matrix} x-y-3=0 \\ 3y-z+6=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=3+t \\ y=t \\ z=6+3t \end{matrix}\right\} \Rightarrow B=(3,0,6)\ ;\ \vec{v}=(1,1,3)$$

Calculamos el determinante de $\vec{AB}=(5,1,5)$, $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=15-3+10-5-6+15=26\neq 0 \Rightarrow \text{Las rectas se cruzan.}$$

b) El plano que nos piden viene determinado por $(A,\vec{u},\vec{v})$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+2 & y+1 & z-1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=3x+6-3y-3+2z-2-z+1-6y-6+3x+6=6x-9y+z+2=0$$

Sean los vectores $\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(0,1,2)$ y $\vec{w}=(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ están en el mismo plano.

b) $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

c) El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\frac{1}{6}$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si están en un mismo plano, los vectores son linealmente dependientes, luego, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+\alpha \\ -1 & 1 & 2\alpha \\ 0 & 2 & 2-3\alpha \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

Luego, están en el mismo plano si $\alpha = 0$.

b) Si $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$, su producto escalar debe valer 0.

$$(1,-1,0)\cdot(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha) = 1+\alpha-2\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(0,1,2)\cdot(1+\alpha,2\alpha,2-3\alpha) = 2\alpha+4-6\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$$

Luego, para $\alpha = 1$ el vector $\vec{w}$ es perpendicular a $\vec{u}$ y $\vec{v}$

c) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V = \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left|-9\alpha\right| \Rightarrow \left|-9\alpha\right| = 1 \Rightarrow \begin{cases} -9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = -\dfrac{1}{9} \\ 9\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{9} \end{cases}$$

Considera el punto $P(2,-2,0)$ y la recta *r* dada por $\left.\begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array}\right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que contiene a *P* y es perpendicular a *r*.
b) Calcula la distancia de *P* a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$\left.\begin{array}{l} x+z-2=0 \\ y+z-1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2-t \\ y=1-t \\ z=t \end{array}\right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u}=(-1,-1,1)$.

Todos los planos perpendiculares a *r* tienen de ecuación: $-x-y+z+D=0$. Como queremos que pase por el punto *P*:

$$-x-y+z+D=0 \Rightarrow -2+2+0+D=0 \Rightarrow D=0$$

Luego, el plano que nos piden es: $-x-y+z=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-x-y+z=0 \Rightarrow -2+t-1+t+t=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto de corte es: $M=(2-1,1-1,1)=(1,0,1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une *P* y el punto *M*, es decir:

$$\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{(-1)^2+(2)^2+(1)^2}=\sqrt{6}\ u$$

Sean $A(-3,4,0)$, $B(3,6,3)$ y $C(-1,2,1)$ los vértices de un triángulo.
a) Halla la ecuación del plano π que contiene al triángulo.
b) Halla la ecuación de la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
c) Calcula el área del triángulo *ABC*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto $A=(-3,4,0)$ y los vectores $\overrightarrow{AB}=(6,2,3)$ y $\overrightarrow{AC}=(2,-2,1)$. Luego su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x+3 & 6 & 2 \\ y-4 & 2 & -2 \\ z & 3 & 1 \end{vmatrix} = x-2z+3=0$$

b) La recta viene definida por el punto $(0,0,0)$ y su vector director será el vector normal del plano $\vec{u}=(1,0,-2)$. Luego su ecuación será: $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{0}=\dfrac{z}{-2}$

c) Aplicamos la fórmula del área del triángulo $S=\dfrac{1}{2}\left|\,\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\,\right||$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 6 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=8\vec{i}-16\vec{k}$$

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{64+0+256}=\frac{\sqrt{320}}{2}u^2$$

Considera el punto $A(8,-1,3)$ y la recta r dada por $\frac{x+1}{2}=y-2=\frac{z-1}{3}$.
a) Calcula la ecuación del plano que pasa por A y es perpendicular a r.
b) Halla el punto simétrico de A respecto de r.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=-1+2t \\ y=2+t \\ z=1+3t \end{cases}$. El vector director de la recta $(2,1,3)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x+y+3z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(8,-1,3)$.

$$2x+y+3z+D=0 \Rightarrow 2\cdot 8-1+3\cdot 3+D=0 \Rightarrow D=-24$$

Luego, el plano que nos piden es: $2x+y+3z-24=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x+y+3z-24=0 \Rightarrow 2\cdot(-1+2t)+(2+t)+3\cdot(1+3t)-24=0 \Rightarrow t=\frac{3}{2}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(-1+3,2+\frac{3}{2},1+\frac{9}{2}\right)=\left(2,\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(8,-1,3)+(a,b,c)}{2}=\left(2,\frac{7}{2},\frac{11}{2}\right) \Rightarrow P'=(-4,8,8)$$

Sea *r* la recta definida por $\begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1+\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ **y *s* la recta dada por** $\dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$**.**

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1-2s \\ y = s \\ z = 1-2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (1+t, 1+t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1-2s, s, 1-2s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (1,1,1) = 0 \Rightarrow 3t+3s = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (t+2s, 1+t-s, -1+t+2s) \cdot (-2,1,-2) = 0 \Rightarrow 3-3t-9s = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = -\dfrac{1}{2}$; $s = \dfrac{1}{2}$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \; ; \; B = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $\vec{AB} = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2}} = \frac{y-\frac{1}{2}}{0} = \frac{z+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = \left(-\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2}\right)$

$$d = \left|\vec{AB}\right| = \sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \; u$$

Considera el plano π de ecuación $2x+y-z+2=0$ y la recta r de ecuación $\frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{-3}$

a) Halla la posición relativa de π y r.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
c) Halla las ecuaciones paramétricas del plano paralelo a π que contiene a r.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Podemos pasar la ecuación de la recta r a implícitas $\frac{x-5}{-2}=y=\frac{z-6}{-3} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x+2y=5 \\ -3x+2z=-3 \end{array}\right.$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=-2 \\ x+2y=\ \ 5 \\ -3x+2z=-3 \end{array}\right\}$

Como $R(A)=2$ y $R(M)=3$, la recta es paralela al plano

b) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k,2,2k)$ y el vector normal del plano π $(2,1,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego su producto escalar vale 0.

$$(1-3k,2,2k)\cdot(2,1,-1)=0 \Rightarrow 2-6k+2-2k=0 \Rightarrow k=\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $-x+4y+2z-7=0$

c) La ecuación de todos los planos que contienen a la recta r es:

$$x+2y-5+k(-3x+2z+3)=0 \Rightarrow (1-3k)x+2y+2kz-5+3k=0$$

El vector normal de este plano $(1-3k,2,2k)$ y el vector normal del plano π $(2,1,-1)$, tienen que ser paralelos, luego sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1-3k}{2}=\frac{2}{1}=\frac{2k}{-1} \Rightarrow k=-1$$

Sustituyendo, tenemos que el plano pedido es: $2x+y-z-4=0 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=t \\ y=4-2t+s \\ z=s \end{array}\right\}$

Considera los puntos $A(1,1,2)$ y $B(1,-1,-2)$ y la recta *r* dada por $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = t \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene a *r* y es paralelo a la recta que pasa por *A* y por *B*.

b) Halla el punto de la recta *r* que está a la misma distancia de *A* y de *B*.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El plano que nos piden viene definido por el punto $(1,0,1)$ de la recta, el vector director de la recta $\vec{u} = (2,1,0)$ y el vector $\vec{AB} = (0,-2,-4)$. Por lo tanto, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-1 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+2y-z+2=0$$

b) Calculamos los vectores:

$$\vec{AC} = (1+2t-1, t-1, 1-2) = (2t, t-1, -1) \; ; \; \vec{BC} = (1+2t-1, t+1, 1+2) = (2t, t+1, 3)$$

Como la distancia es la misma, entonces:

$$\left|\vec{AC}\right| = \left|\vec{BC}\right| \Rightarrow \sqrt{4t^2+(t-1)^2+1} = \sqrt{4t^2+(t+1)^2+9} \Rightarrow t = -2$$

Luego, el punto C es: $C = (1+2t, t, 1) = (-3,-2,1)$

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(2,-1,3)$.

a) Calcula la distancia del origen de coordenadas a la recta *r*.

b) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y pasa por el origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la ecuación de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = -t \\ z = -1+4t \end{cases}$

Calculamos la ecuación de todos los planos que son perpendiculares a *r*: $x - y + 4z + D = 0$.

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto $(0,0,0)$, luego:

$$x - y + 4z + D = 0 \Rightarrow 0 - 0 + 4\cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow x - y + 4z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$x - y + 4z = 0 \Rightarrow 1 + t + t + 4(-1+4t) = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{6}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1+\frac{1}{6}, -\frac{1}{6}, -1+\frac{4}{6}\right) = \left(\frac{7}{6}, -\frac{1}{6}, -\frac{2}{6}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector que une el origen de coordenadas y el punto *M*, es decir:

$$\left|\vec{OM}\right| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}\right)^2 + \left(\frac{-1}{6}\right)^2 + \left(\frac{-2}{6}\right)^2} = \sqrt{\frac{54}{36}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\ u$$

b) La ecuación de la recta que pasa por *O* y *M* es: $\dfrac{x}{\frac{7}{6}} = \dfrac{y}{-\frac{1}{6}} = \dfrac{z}{-\frac{2}{6}}$

Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$
a) Calcula *m* para que *A, B, C* y *D* estén en un mismo plano.
b) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos *A* y *B* son simétricos.
c) Calcula el área del triángulo *A,B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los cuatro puntos están en el mismo plano eso quiere decir que los vectores $\vec{AB}, \vec{AC}$ y $\vec{AD}$ tienen que ser coplanarios, es decir, tienen que ser linealmente dependientes, luego su determinante tiene que valer 0.

Los vectores son: $\vec{AB}=(2,0,2)$; $\vec{AC}=(-1,1,-1)$ y $\vec{AD}=(2,0,m-1)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & m-1 \end{vmatrix} = 2m-2-4=0 \Rightarrow m=3$$

Luego, para $m=3$, los cuatro puntos están en un mismo plano.

b) El plano que nos piden pasa por el punto medio del segmento AB y su vector normal es $\vec{AB}=(2,0,2)$.

El punto medio es: $M=\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(1,1,2)$.

Todos los planos que tienen por vector normal el vector $\vec{AB}=(2,0,2)$, tienen de ecuación $2x+2z+D=0$. Como tiene que pasar por el punto $M(1,1,2)$, su ecuación será:

$$2\cdot 1+2\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=-6 \Rightarrow 2x+2z-6=0 \Rightarrow x+z-3=0$$

c) Los vectores son: $\vec{AB}=(2,0,2)$ y $\vec{AC}=(-1,1,-1)$

$$Área=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot módulo\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\cdot módulo(-2,0,2)=\frac{\sqrt{8}}{2}=\sqrt{2}\ u^2$$

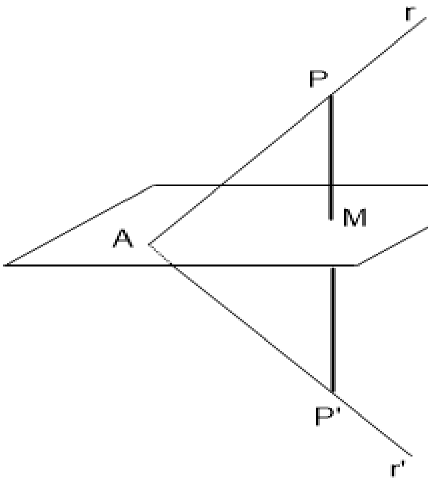
Sea el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 8 = 0$

a) Calcula el punto *P'*, simétrico del punto $P(2,-1,5)$ respecto del plano π .

b) Calcula la recta *r'*, simétrica de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-5}{1}$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2,1,-1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2 \cdot (2+2t) + (-1+t) - (5-t) + 8 = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $x = 0 ; y = -2 ; z = 6$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que: $\dfrac{a+2}{2} = 0 ; a = -2$; $\dfrac{b-1}{2} = -2 ; b = -3$; $\dfrac{c+5}{2} = 6 ; c = 7$

Luego, el punto simétrico es el $P'(-2,-3,7)$

b) Calculamos el punto de corte de la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 - 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = 5 + t \end{cases}$ con el plano π

$$2 \cdot (2-2t) + (-1+3t) - (5+t) + 8 = 0 \Rightarrow t = 3 \Rightarrow A(-4,8,8)$$

La recta que nos piden pasa por el punto *A* y *P'*, luego: $\overrightarrow{AP'}(2,-11,-1)$

$$r' \equiv \frac{x+4}{2} = \frac{y-8}{-11} = \frac{z-8}{-1}$$

Considera el punto $P(-3,1,6)$ y la recta *r* dada por $\begin{cases} 2x-y-5=0 \\ y-z+2=0 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.
b) Calcula las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de la recta *r*.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=-5+2t \\ z=-3+2t \end{cases}$. El vector director de la recta $(1,2,2)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$x+2y+2z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto $(-3,1,6)$.

$$x+2y+2z+D=0 \Rightarrow -3+2\cdot 1+2\cdot 6+D=0 \Rightarrow D=-11$$

Luego, el plano que nos piden es: $x+2y+2z-11=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$x+2y+2z-11=0 \Rightarrow x+2\cdot(-5+2t)+2\cdot(-3+2t)-11=0 \Rightarrow t=3$$

Luego, el punto de corte es: $M=(3,-5+2\cdot 3,-3+2\cdot 3)=(3,1,3)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(-3,1,6)+(a,b,c)}{2}=(3,1,3) \Rightarrow P'=(9,1,0)$$

Los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$ son dos vértices de un triángulo. El tercer vértice es un punto de la recta *r* dada por $\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases}$

a) Calcula las coordenadas de los posibles puntos *C* de *r* para que el triángulo *ABC* tenga un ángulo recto en el vértice *A*.

b) Calcula las coordenadas de los posibles puntos *D* de *r* para que el triángulo *ABD* tenga un área igual a $\sqrt{2}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$\begin{cases} 2x+y=0 \\ z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-2t \\ z=0 \end{cases}$$

Cualquier punto *C*, tendrá de componentes $C=(t,-2t,0)$. Como queremos que sea un triángulo rectángulo en A, los vectores $\vec{AB}=(2,0,2)$ y $\vec{AC}=(t,-2t-1,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer 0.

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=(2,0,2)\cdot(t,-2t-1,-1)=2t-2=0\Rightarrow t=1$$

Luego el punto C será: $C=(1,-2,0)$

b) Cualquier punto *D*, tendrá de componentes $D=(t,-2t,0)$.

Calculamos el área del triángulo *ABD*.

$\vec{AB}=(2,0,2)$; $\vec{AD}=(t,-2t-1,-1)$.

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AD}\right|=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ t & -2t-1 & -1 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\textit{módulo}\left[(2+4t)\vec{i}+(2+2t)\vec{j}-(2+4t)\vec{k}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(2+4t)^2+(2+2t)^2+(2+4t)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36t^2+40t+12}=\sqrt{2}\Rightarrow 9t^2+10t+1=0\Rightarrow t=-1\,;t=-\frac{1}{9}$$

Luego el punto D será: $D=(-1,2,0)$ ó $D=\left(-\frac{1}{9},\frac{2}{9},0\right)$

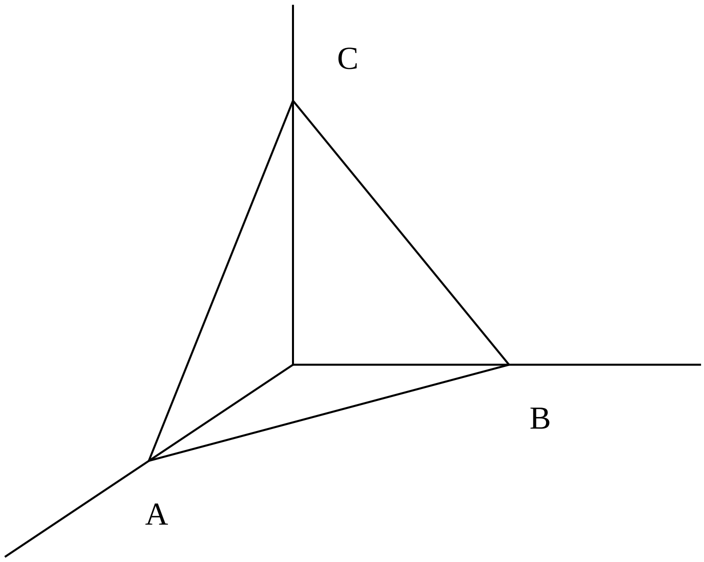
Sean los planos $\pi \equiv x+3y+2z-5=0$ y $\pi' \equiv -2x+y+3z+3=0$.
a) Determina el ángulo que forman π y π'.
b) Calcula el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores normales de los planos son: $\vec{n}_1=(1,3,2)$ y $\vec{n}_2=(-2,1,3)$. Aplicando la fórmula del ángulo de dos planos, tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot(-2)+3\cdot 1+2\cdot 3}{\sqrt{1+9+4}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{7}{14}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=60^{\circ}$$

b)



Los puntos de corte del plano con los ejes coordenados son: $A=(5,0,0)$; $B=\left(0,\frac{5}{3},0\right)$ y $C=\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$

Calculamos los vectores $\vec{OA}=(5,0,0)$; $\vec{OB}=\left(0,\frac{5}{3},0\right)$ y $\vec{OC}=\left(0,0,\frac{5}{2}\right)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & \frac{5}{3} & 0\\ 0 & 0 & \frac{5}{2}\end{vmatrix}=\frac{125}{36}\ u^3$$

Sean el punto $P(1,6,-2)$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2}$

a) Halla la ecuación general del plano π que contiene al punto *P* y a la recta *r*.
b) Calcula la distancia entre el punto *P* y la recta *r*
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x-5}{6} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 5+6t \\ y = -1-3t \\ z = 2t \end{array} \right\}$

La recta pasa por el punto $A=(5,-1,0)$ y su vector director es $\vec{u}=(6,-3,2)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(5,-1,0)$, el vector $\vec{u}=(6,-3,2)$ y el vector $\vec{AP}=(-4,7,-2)$ luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-5 & 6 & -4 \\ y+1 & -3 & 7 \\ z & 2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -8x+4y+30z+44=0 \Rightarrow -4x+2y+15z+22=0$$

b) Calculamos el plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*

$$6x-3y+2z+D=0 \Rightarrow 6\cdot 1-3\cdot 6+2\cdot(-2)+D=0 \Rightarrow D=-16 \Rightarrow 6x-3y+2z+16=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$6\cdot(5+6t)-3\cdot(-1-3t)+2\cdot(2t)+16=0 \Rightarrow 49+49t=0 \Rightarrow t=-1$$

Luego el punto de corte es:

$$M=(5+6t,-1-3t,2t)=\left(5+6\cdot(-1),-1-3\cdot(-1),2\cdot(-1)\right)=(-1,2,-2)$$

La distancia es el módulo del vector $\vec{PM}=(-2,-4,0)$, luego:

$$\left|\vec{PM}\right| = \sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(0)^2} = \sqrt{20} = 4'47 \ u$$

Halla unas ecuaciones paramétricas para la recta *r*, que contiene al punto $P(3,-5,4)$ y corta perpendicularmente a la recta $s \equiv \dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z}{4}$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta *s* a paramétricas: $\dfrac{x-4}{5} = \dfrac{y-8}{-3} = \dfrac{z}{4} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 4+5t \\ y = 8-3t \\ z = 4t \end{array}\right\}$

Cualquier punto M de la recta s tiene de coordenadas $M = (4+5t, 8-3t, 4t)$. El vector $\vec{PM} = (1+5t, 13-3t, -4+4t)$ tiene que ser perpendicular al vector director $\vec{u} = (5,-3,4)$ de la recta s, por lo tanto, su producto escalar debe valer cero

$$\vec{PM} \cdot \vec{u} = (1+5t, 13-3t, -4+4t) \cdot (5,-3,4) = 0 \Rightarrow 5+25t-39+9t-16+16t = 0 \Rightarrow 50t-50 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Por lo tanto el vector $\vec{PM}$, será: $\vec{PM} = (6,10,0)$ y la ecuación paramétrica de la recta *r* que nos piden es: $\left.\begin{array}{l} x = 3+6t \\ y = -5+10t \\ z = 4 \end{array}\right\}$

Sea *r* la recta de ecuación $r \equiv \frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z$

a) Halla el punto de *r* que equidista del origen de coordenadas y del punto $P(4,-2,2)$

b) Determina el punto de la recta *r* más próximo al origen de coordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{4} = z \Rightarrow \begin{cases} x = -2+3t \\ y = -1+4t \\ z = t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $A = (-2+3t, -1+4t, t)$.

Como este punto equidista de *O* y de *P*, se cumple que: $\left|\overrightarrow{OA}\right| = \left|\overrightarrow{PA}\right|$.

$$\overrightarrow{OA} = (-2+3t, -1+4t, t) \Rightarrow \left|\overrightarrow{OA}\right| = \sqrt{(-2+3t)^2 + (-1+4t)^2 + (t)^2} = \sqrt{26t^2 - 20t + 5}$$

$$\overrightarrow{PA} = (-6+3t, 1+4t, -2+t) \Rightarrow \left|\overrightarrow{PA}\right| = \sqrt{(-6+3t)^2 + (1+4t)^2 + (-2+t)^2} = \sqrt{26t^2 - 32t + 41}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{26t^2 - 20t + 5} = \sqrt{26t^2 - 32t + 41} \Rightarrow 12t = 36 \Rightarrow t = 3$$

Luego, el punto que nos piden es: $A = (7,11,3)$.

b) Calculamos el plano perpendicular a *r* y que pasa por el origen de coordenadas

$$3x + 4y + z + D = 0 \Rightarrow 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + D = 0 \Rightarrow D = 0 \Rightarrow 3x + 4y + z = 0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$3 \cdot (-2+3t) + 4 \cdot (-1+4t) + 1 \cdot t = 0 \Rightarrow 26t - 10 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{13}$$

Luego el punto de corte es:

$$M = \left(-2 + 3 \cdot \frac{5}{13}, -1 + 4 \cdot \frac{5}{13}, \frac{5}{13}\right) = \left(-\frac{11}{13}, \frac{7}{13}, \frac{5}{13}\right)$$

Considera los puntos $B(1,2,-3)$, $C(9,-1,2)$, $D(5,0,-1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ y-z \quad =0 \end{cases}$

a) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son *B, C* y *D*.
b) Halla un punto *A* en la recta *r* de forma que el triángulo *ABC* sea rectángulo en *A*.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{BC}=(8,-3,5)$; $\vec{BD}=(4,-2,2)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S=\frac{1}{2}\,|\vec{BC}\wedge\vec{BD}|=$$

$$\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\ (4,4,-4)=\frac{1}{2}\sqrt{4^2+4^2+4^2}=\sqrt{12}=3'46\ u^2$$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x+y+1=0 \\ y-z \quad =0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-t \\ y=t \\ z=t \end{cases}$

Cualquier punto *A* de la recta *r* tendrá de coordenadas $A=(-1-t,t,t)$. Como el ángulo recto está en *A*, los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, son perpendiculares, luego su producto escalar vale cero.

$$\vec{AB}=(2+t,2-t,-3-t)$$

$$\vec{AC}=(10+t,-1-t,2-t)$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=0\Rightarrow(2+t,2-t,-3-t)\cdot(10+t,-1-t,2-t)=0\Rightarrow 3t^2+12t+12=0\Rightarrow t=-2$$

Luego, el punto *A* es: $A=(1,-2,-2)$

Considera el punto $P(1,0,-1)$ y la recta *r* dada por $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases}$

a) Halla la distancia de *P* a *r*.
b) Determina la ecuación general del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*

$$x-y+D=0 \Rightarrow 1\cdot 1-1\cdot 0+D=0 \Rightarrow D=-1 \Rightarrow x-y-1=0$$

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano

$$1\cdot t-1\cdot(-t)-1=0 \Rightarrow t=\frac{1}{2}$$

Luego el punto de corte es: $M=(t,-t,1)=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},1\right)$

La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PM}=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},2\right)$, luego:

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+(2)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}=2'12\ u$$

b) Pasamos la recta a paramétricas: $\begin{cases} x+y=0 \\ z-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=-t \\ z=1 \end{cases}$

La recta pasa por el punto $A=(0,0,1)$ y su vector director es $\vec{u}=(1,-1,0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(0,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,-1,0)$ y el vector $\overrightarrow{AP}=(1,0,-2)$ luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & -1 & 0 \\ z-1 & 0 & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x+2y+z-1=0$$

Sea r la recta definida por $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y s la recta dada por $\begin{cases} x-y=1 \\ z=-1 \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas.
b) Calcula la distancia entre r y s.
MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=t-2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=1+s \\ y=s \\ z=-1 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A=(1,1,t-2)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B=(1+s,s,-1)$

El vector $\overrightarrow{AB}$ tendrá de coordenadas: $\overrightarrow{AB}=(s,s-1,1-t)$

Como el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (s,s-1,1-t)\cdot(0,0,1)=0 \Rightarrow 1-t=0 \Rightarrow t=1$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (s,s-1,1-t)\cdot(1,1,0)=0 \Rightarrow s+s-1=0 \Rightarrow s=\frac{1}{2}$$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(1,1,-1) \ ; \ B=\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2},-1\right)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A=(1,1,-1)$ y $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{\frac{1}{2}}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}}=\frac{z+1}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{2},0\right)$

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+0}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}=0'7071\ u$$

Considera el plano π de ecuación $mx+5y+2z=0$ y la recta *r* dada por $\frac{x+1}{3}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{2}$

a) Calcula *m* y *n* en el caso en el que la recta *r* es perpendicular al plano π.

b) Calcula *m* y *n* en el caso en el que la recta *r* está contenida en el plano π.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta y el vector normal del plano son paralelos, luego, sus componentes son proporcionales.

$$\frac{m}{3}=\frac{5}{n}=\frac{2}{2}\Rightarrow m=3\ ;\ n=5$$

b) Para que la recta *r* esté contenida en el plano π, el punto de la recta debe pertenecer al plano y el vector director de la recta y el vector normal del plano deben ser perpendiculares, es decir, su producto escalar debe valer 0.

Sustituimos el punto en la ecuación del plano.

$$m\cdot(-1)+5\cdot 0+2\cdot 1=0\Rightarrow m=2$$

El producto escalar de los vectores $(m,5,2)$ y $(3,n,2)$ debe valer cero, luego:

$$m\cdot 3+5\cdot n+2\cdot 2=0\Rightarrow 3m+5n+4=0\Rightarrow 6+5n+4=0\Rightarrow n=-2$$

Considera el punto $P(1,0,5)$ y la recta *r* dada por $\left.\begin{array}{r} y+2z=0 \\ x=1 \end{array}\right\}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y es perpendicular a *r*.

b) Calcula la distancia de *P* a la recta *r* y el punto simétrico de *P* respecto a *r*.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas

$$\left.\begin{array}{r} y+2z=0 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2t \\ z=t \end{array}\right\}$$

Con lo cual el vector director es: $\vec{u}=(0,-2,1)$.

Todos los planos perpendiculares a *r* tienen de ecuación: $-2y+z+D=0$. Como queremos que pase por el punto *P*:

$$-2y+z+D=0 \Rightarrow -2\cdot 0+5+D=0 \Rightarrow D=-5$$

Luego, el plano que nos piden es: $-2y+z-5=0$.

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-2y+z-5=0 \Rightarrow -2\cdot(-2t)+t-5=0 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto de corte es: $M=(1,-2,1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{PM}=(0,-2,-4)$, es decir:

$$\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}\ u$$

Si llamamos $P'=(a,b,c)$, se cumple que el punto M es el punto medio del segmento PP', luego:

$$\frac{1+a}{2}=1 \Rightarrow a=1 \ ; \ \frac{0+b}{2}=-2 \Rightarrow b=-4 \ ; \ \frac{5+c}{2}=1 \Rightarrow c=-3$$

Por lo tanto, el simétrico es: $P'=(1,-4,-3)$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas *r* y *s*, calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *s* a paramétricas y calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1,1,1) \\ \vec{u} = (2,-1,0) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1,0,-1) \\ \vec{v} = (-2,1,0) \end{cases}$$

Como las componentes de los dos vectores directores de las rectas son proporcionales, los vectores son paralelos y las rectas paralelas, por lo tanto, las rectas son coplanarias.

El plano que nos piden viene definido por el punto A y los vectores $\overrightarrow{AB} = (-2,-1,-2)$ y $\vec{u}$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 4y + 4z + 2 = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z + 1 = 0$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto $A = (1,1,1)$ a la recta *s*. Para ello calculamos un plano perpendicular a *s* y que pase por el punto $A = (1,1,1)$

$$-2x + y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} -2x + y + 1 = 0 \\ x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2(-1-2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow 5t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{5}$$

Luego, el punto de corte es el $M = \left(-1 + \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$. La distancia entre las rectas viene dada por el módulo del vector $\vec{AM} = \left(\frac{1}{5} - 1, -\frac{3}{5} - 1, -1 - 1\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -2\right)$, luego:

$$d = \left| \vec{AM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}}\ u$$

La distancia entre las rectas es el lado del cuadrado, luego su área será: $S = d^2 = \frac{36}{5}\ u^2$

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos *A*, *B*, *C* y *D* siendo

$$A(1,0,-1),\ B(3,2,1)\ \text{y}\ C(-7,1,5)$$

a) Determina las coordenadas del punto *D*.
b) Calcula el área del paralelogramo.
c) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal *AC* es: $M=\left(\frac{1-7}{2},\frac{0+1}{2},\frac{-1+5}{2}\right)=\left(-3,\frac{1}{2},2\right)$

El punto medio de la diagonal *BD*, también es *M*, luego si llamamos $D(a,b,c)$, se tiene que cumplir:

$$M=\left(\frac{3+a}{2},\frac{2+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(-3,\frac{1}{2},2\right)\Rightarrow D(-9,-1,3)$$

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(2,2,2)$ y $\vec{AD}=(-10,-1,4)$ y aplicamos la fórmula del área del paralelogramo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix}=(10,-28,18)$$

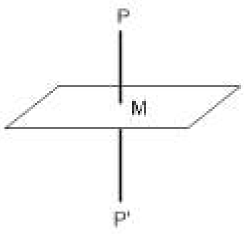
$$\boldsymbol{S}=|\vec{AB}\wedge\vec{AD}|=\sqrt{10^2+28^2+18^2}=\sqrt{1208}=34'75\ u^2$$

c) El plano viene definido por el punto $A=(1,0,-1)$ y los vectores $\vec{AB}=(2,2,2)$ y $\vec{AD}=(-10,-1,4)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -10 \\ y & 2 & -1 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix}=0\Rightarrow 5x-14y+9z+4=0$$

Se considera el punto $P(1,0,-1)$ y el plano π de ecuación $2x-y+z+1=0$.
a) Halla el simétrico del punto P respecto al plano π.
b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto P, es perpendicular al plano π y es paralelo a la recta dada por $\begin{cases} x-2y=1 \\ z=3 \end{cases}$
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(2,-1,1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=-t \\ z=-1+t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $2\cdot(1+2t)-1\cdot(-t)+1\cdot(-1+t)+1=0 \Rightarrow t=-\dfrac{1}{3}$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{3},-\dfrac{4}{3}\right)$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento *P P'*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto *P'*, se debe verificar que: $\dfrac{a+1}{2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow a=-\dfrac{1}{3}$; $\dfrac{b+0}{2}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow b=\dfrac{2}{3}$; $\dfrac{c-1}{2}=-\dfrac{4}{3}\Rightarrow c=-\dfrac{5}{3}$

Luego, el punto simétrico es el $P'\left(-\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3},-\dfrac{5}{3}\right)$

b) Calculamos el vector director de la recta $\begin{cases} x-2y=1 \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=3 \end{cases} \Rightarrow \vec{u}=(2,1,0)$

El plano que nos piden viene definido por el punto $P(1,0,-1)$, el vector $\vec{u}=(2,1,0)$ y el vector normal del plano $\vec{n}=(2,-1,1)$. Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow x-2y-4z-5=0$$

Sea *r* la recta dada por $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$ y sea *s* la recta definida por $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas *r* y *s* se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta *r* pasa por el punto $A=(1,-1,0)$ y su vector director es $\vec{u}=(-1,0,1)$. La recta *s* pasa por el punto $B=(2,2,2)$ y su vector director es $\vec{v}=(1,0,2)$. Las rectas se cruzan si el rango de la matriz formada por los vectores $\vec{u}=(-1,0,1)$, $\vec{v}=(1,0,2)$ y $\vec{AB}=(1,3,2)$ es tres. Vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3+6=9\neq 0 \Rightarrow \text{ El rango vale 3 y las rectas se cruzan.}$$

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r\equiv\begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s\equiv\begin{cases} x=2+s \\ y=2 \\ z=2+2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A=(1-t,-1,t)$ y cualquier punto de la recta *s* tendrá de coordenadas $B=(2+s,2,2+2s)$. El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(1+s+t,3,2+2s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=0\Rightarrow -1-s-t+2+2s-t=0\Rightarrow 1+s-2t=0$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow 1+s+t+4+4s-2t=0\Rightarrow 5+5s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=0$; $s=-1$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(1,-1,0) \;;\; B=(1,2,0)$$

La recta perpendicular viene definida por el punto $A=(1,-1,0)$ y el vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, luego:

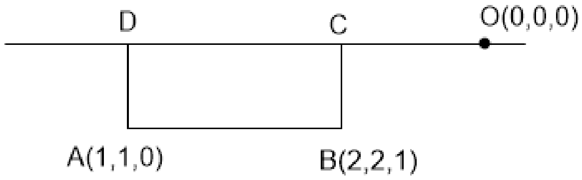
$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{3}=\frac{z}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}=(0,3,0)$, por lo tanto: $d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{9}=3\ u$

Considera un rectángulo de vértices consecutivos *A*, *B*, *C* y *D* siendo $A(1,1,0)$ y $B(2,2,1)$.
Sabiendo que la recta *r* que contiene a los puntos *C* y *D* pasa por el origen de coordenadas se pide:
a) Halla unas ecuaciones paramétricas de *r*.
b) Calcula el área del triángulo *ABC*.
c) Determina las coordenadas del punto *D*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



La recta que pasa por *C* y *D* tiene el mismo vector director que la recta que pasa por *A* por *B*, luego, su ecuación es: $r \equiv \dfrac{x-0}{1} = \dfrac{y-0}{1} = \dfrac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$

b) Con el punto $B(2,2,1)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x+y+z+D=0 \Rightarrow 2+2+1+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow x+y+z-5=0$$

Las coordenadas del punto *C* son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x+y+z-5=0 \Rightarrow t+t+t-5=0 \Rightarrow t=\frac{5}{3} \Rightarrow C=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$$

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(1,1,1)$; $\vec{AC}=\left(\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{3},\dfrac{5}{3}\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S=\frac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}| = \frac{1}{2}\ \textit{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\ \textit{módulo}\ (1,-1,0) = \frac{1}{2}\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,u^2$$

c) Con el punto $A(1,1,0)$ y el vector $\vec{AB}(1,1,1)$ hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x+y+z+D=0 \Rightarrow 1+1+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow x+y+z-2=0$$

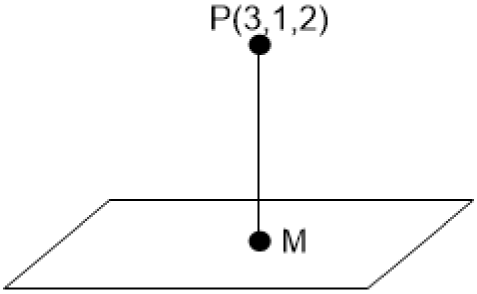
Las coordenadas del punto *D*, son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x+y+z-2=0 \Rightarrow t+t+t-2=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3} \Rightarrow D=\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

Considera el plano π de ecuación $x+2y+z=1$.
a) Halla el punto de π más próximo al punto $(3,1,2)$.
b) Determina la ecuación de un plano paralelo a π que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $\sqrt{6}$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto *P* es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,2,1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=3+t \\ y=1+2t \\ z=2+t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $1\cdot(3+t)+2\cdot(1+2t)+1\cdot(2+t)-1=0 \Rightarrow t=-1$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $M=\left(3+t,1+2t,2+t\right)=\left(2,-1,1\right)$

b) El plano paralelo tendrá de ecuación: $x+2y+z=D$. Calculamos los puntos de corte con los ejes coordenados: $A=\left(D,0,0\right)$; $B=\left(0,\dfrac{D}{2},0\right)$; $C=\left(0,0,D\right)$

Calculamos los vectores: $\vec{AB}=\left(-D,\dfrac{D}{2},0\right)$; $\vec{AC}=\left(-D,0,D\right)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo: $S=\dfrac{1}{2}\,|\vec{AB}\wedge\vec{AC}|=$

$$=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -D & \dfrac{D}{2} & 0 \\ -D & 0 & D \end{vmatrix}=\frac{1}{2}\ \textit{módulo}\left(\frac{D^2}{2},D^2,\frac{D^2}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{D^4}{4}+D^4+\frac{D^4}{4}}=\sqrt{6}\Rightarrow D=\pm 2$$

Luego, la ecuación del plano paralelo es: $x+2y+z=2$ *ó* $x+2y+z=-2$

Sea *r* la recta que pasa por los puntos $A(1,1,0)$ y $B(3,-1,1)$ y *s* la recta dada por

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.
b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por *B* y es perpendicular a *s*.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A=(1,1,0) \\ \vec{u}=\vec{AB}=(2,-2,1) \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(-1,0,-1) \\ \vec{v}=(-2,1,-1) \end{cases}.$$

El plano que nos piden viene definido por el punto $(0,0,0)$ y los vectores $\vec{u}=(2,-2,1)$ y $\vec{v}=(-2,1,-1)$
La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -2 \\ y-0 & -2 & 1 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2z=0$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) El vector normal del plano es el vector director de *s*, luego: $-2x+y-z+D=0$

y queremos que pase por el punto *B*:

$$-2\cdot 3-1-1+D=0 \Rightarrow D=8$$

El plano que nos piden es: $-2x+y-z+8=0 \Rightarrow \begin{cases} x=t \\ y=s \\ z=8-2t+s \end{cases}$

Determina el punto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$ que equidista de los planos

$$\pi \equiv x+y+z+3=0 \qquad y \qquad \pi' \equiv \begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=-\lambda+\mu \\ z=-6-\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la ecuación general del plano π'

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+3+z+6+y=0 \Rightarrow x+y+z+9=0$$

Pasamos la recta *r* a paramétricas $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x=1+2t \\ y=-1+t \\ z=3t \end{cases}$ y, por tanto, podemos tomar como punto genérico de la recta $P=(1+2t,-1+t,3t)$.

Como piden los puntos que equidistan de los planos π y π', tenemos que $d(P,\pi)=d(P,\pi')$, luego:

$$d(P,\pi)=d(P,\pi') \Rightarrow \frac{|1+2t-1+t+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+2t-1+t+3t+9|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3+6t|}{\sqrt{3}} = \frac{|9+6t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3+6t| = |9+6t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$3+6t=9+6t \Rightarrow \textit{No tiene solución}$$

$$3+6t=-9-6t \Rightarrow t=-1 \Rightarrow P=(-1,-2,-3)$$

Considera el plano π de ecuación $6x - my + 2z = 1$ y la recta *r* dada por $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula *m* en el caso en que la recta *r* es perpendicular al plano π .
b) ¿Existe algún valor de *m* para el que la recta *r* esté contenida en el plano π ?.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta $\vec{u} = (-3,2,-1)$ y el vector normal del plano $\vec{n} = (6,-m,2)$, son paralelos, luego:

$$\frac{6}{-3} = \frac{-m}{2} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = 4$$

b) Pasamos la recta a implícitas

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = -3y-3 \\ -x+1 = -3z-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las tres ecuaciones: $\begin{cases} x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \\ 6x-my+2z = \ \ 1 \end{cases}$

La recta está contenida en el plano si $Rango(A) = Rango(M) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & -m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 54+6+3m = 0 \Rightarrow m = -20 \Rightarrow \begin{cases} m = -20 \Rightarrow Rango\ A = 2 \\ m \neq -20 \Rightarrow Rango\ A = 3 \end{cases}$$

$$m = -20 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -7 \\ 6 & 20 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-6F_1]{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{2}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, no hay ningún valor de *m* para el cuál la recta esté contenida en el plano.

Considera el punto $A(1,-1,1)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = 1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$.

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de *A* respecto a *r*.
b) Determina la ecuación del plano que contiene a *r* y pasa por *A*.
MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a *r* y que pasa por *A*. El vector director de la recta $(2,-1,0)$, es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x - y + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto $(1,-1,1)$.

$$2x - y + D = 0 \Rightarrow 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Luego, el plano es: $2x - y - 3 = 0$.

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x - y - 3 = 0 \Rightarrow 2\cdot(1+2\lambda) - (1-\lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M = \left(1+\frac{4}{5}, 1-\frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$.

Si llamamos al punto simétrico $A' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,1)+(a,b,c)}{2} = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) \Rightarrow A' = \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)$$

b) De la recta *r* sabemos que: $B(1,1,1)$ y $\vec{u} = (2,-1,0)$. El plano que nos piden viene definido por el punto *B* y los vectores $\vec{u} = (2,-1,0)$ y $\vec{AB} = (0,2,0)$, luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4z - 4 = 0 \Rightarrow z - 1 = 0$$

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 + s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta r tendrá de coordenadas $A = (t, t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (1 + s, 3 + s, -s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1 + s - t, 3 + s - t, -s - t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta r y s se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t - s - t = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t + s + t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = 1$; $s = -1$

Luego, los puntos A y B que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1,1,1) \ ; \ B = (0,2,1)$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\vec{AB}$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2} \ u$$

Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta *r* dada por $\begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que pasa por *P* y contiene a *r*.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de *P* respecto de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

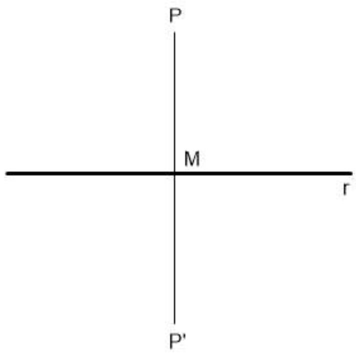
R E S O L U C I Ó N

a) De la recta: $r \equiv \begin{cases} x = 1+3t \\ y = -2 \\ z = t \end{cases}$ sabemos un punto $A = (1,-2,0)$ y su vector director $\vec{u} = (3,0,1)$.

El plano que nos piden viene definido por el punto $P = (1,-1,0)$ y los vectores directores $\vec{u} = (3,0,1)$ y $\vec{PA} = (0,-1,0)$, luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 3 & 0 \\ y+1 & 0 & -1 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -x+3z+1 = 0$$

b)



Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas $M = (1+3t,-2,t)$. Calculamos el vector $\vec{PM} = (1+3t-1,-2+1,t-0) = (3t,-1,t)$. Queremos que el vector $\vec{PM}$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u} = (3,0,1)$, luego: $\vec{PM} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (3t,-1,t)\cdot(3,0,1) = 0 \Rightarrow 9t+t = 0 \Rightarrow t = 0$

Por lo tanto el punto M tiene de coordenadas: $M = (1,-2,0)$.
Si llamamos al punto simétrico $P' = (a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,-1,0)+(a,b,c)}{2} = (1,-2,0) \Rightarrow P' = (1,-3,0)$$

Considera los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$ y $\vec{w}=(m,1,n)$. Halla los valores de α en cada uno de los siguientes casos:

a) Halla m y n sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para $n=1$, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ tenga volumen 10 unidades cúbicas

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Si los vectores son linealmente dependientes, su determinante vale 0.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & n \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2n-2m-1=0$$

Si $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u} \Rightarrow \vec{w}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow m+n=0$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, obtenemos que: $m=\frac{1}{4}$; $n=-\frac{1}{4}$

b) El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, es decir:

$$V=10=\frac{1}{6}\ Valor\ absoluto\ de \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ m & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}|1-2m| \Rightarrow |1-2m|=60 \Rightarrow \begin{cases} 1-2m=60 \Rightarrow m=-\frac{59}{2} \\ -1+2m=60 \Rightarrow m=\frac{61}{2} \end{cases}$$

Considera los vectores $\vec{u}=(2,3,4)$, $\vec{v}=(-1,-1,-1)$ y $\vec{w}=(-1,\lambda,-5)$ siendo λ un número real.
a) Halla los valores de λ para los que el paralelepípedo determinado por $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tiene volumen 6 unidades cúbicas.
b) Determina el valor de λ para el que $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente dependientes.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El volumen del paralelepípedo viene dado por el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda-6 \Rightarrow \left|-2\lambda-6\right| = 6 \Rightarrow \lambda=0 \ ; \ \lambda=-6$$

b) Para que los vectores sean linealmente dependientes su determinante tiene que ser 0, es decir:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda & -5 \end{vmatrix} = -2\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=-3$$

Sea *r* la recta que pasa por $A(4,3,6)$ y $B(-2,0,0)$ y sea *s* la recta dada por $\left\{\begin{array}{l} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1-2\lambda \end{array}\right.$

a) Determina la posición relativa de *r* y *s*.

b) Calcula, si existen, los puntos *C* de *s* tales que los vectores $\overrightarrow{CA}$ y $\overrightarrow{CB}$ son ortogonales.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta *r* viene definida por $A(4,3,6)$ y el vector $\overrightarrow{AB}=(-6,-3,-6)$. La recta s viene definida por el punto $D(2,0,1)$ y el vector $\vec{u}=(1,1,-2)$. Calculamos el vector $\overrightarrow{AD}=(-2,-3,-6)$. Calculamos el rango de la matriz formada por los tres vectores:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -6 & -3 & -2 \\ -2 & -3 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3+2F_1]{F_2+6F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & -14 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+3F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -44 \\ 0 & -1 & -10 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=3$$

Luego, las rectas se cruzan.

b) Cualquier punto *C* de la recta *s*, tiene de componentes: $C(2+t,t,1-2t)$. Calculamos los vectores: $\overrightarrow{CA}=(2-t,3-t,5+2t)$ y $\overrightarrow{CB}=(-4-t,-t,-1+2t)$. Si son ortogonales, su producto escalar vale cero:

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB}=(2-t,3-t,5+2t)\cdot(-4-t,-t,-1+2t)=6t^2+7t-13=0 \Rightarrow t=1\ ;\ t=-\frac{13}{6}$$

Luego, los puntos *C* son: $C_1(3,1,-1)$ y $C_2\left(-\frac{1}{6},-\frac{13}{6},\frac{16}{3}\right)$

Considera las rectas dadas por $r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Halla la distancia entre las rectas *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos un punto genérico de cada recta y su vector director.

$$r \equiv \begin{cases} x-y+1=0 \\ x-z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=s \\ y=1+s \\ z=1+s \end{cases} \Rightarrow A(s,1+s,1+s) \ ; \ \vec{u}=(1,1,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=t \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow B(1-t,t,2) \ ; \ \vec{v}=(-1,1,0)$$

El vector $\overrightarrow{AB}$ tiene de coordenadas: $\overrightarrow{AB}=(1-t-s,t-1-s,1-s)$.
Como el vector $\overrightarrow{AB}$ tiene que ser perpendicular a las rectas *r* y *s*, se debe cumplir:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (1-t-s,t-1-s,1-s)\cdot(1,1,1)=1-t-s+t-1-s+1-s=1-3s=0 \Rightarrow s=\frac{1}{3}$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (1-t-s,t-1-s,1-s)\cdot(-1,1,0)=-1+t+s+t-1-s=2t-2=0 \Rightarrow t=1$$

Con lo cual: $A(s,1+s,1+s)=\left(\frac{1}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3}\right)$; $B(1-t,t,2)=(0,1,2)$;

$$\overrightarrow{AB}=(1-t-s,t-1-s,1-s)=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$$

La recta que nos piden es: $\dfrac{x-\frac{1}{3}}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{y-\frac{4}{3}}{-\frac{1}{3}}=\dfrac{z-\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}$

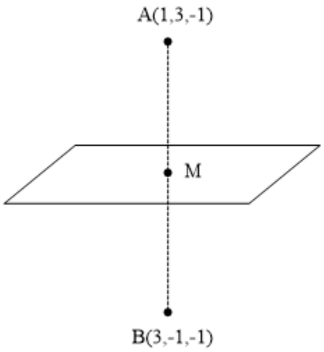
b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}=\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

$$d=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{9}}=0'816 \ u$$

Considera los puntos $A(1,3,-1)$ y $B(3,-1,-1)$.
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual *B* es el simétrico de *A*.
b) Siendo $C(5,1,5)$, calcula el área del triángulo de vértices *A*;*B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto *M*

$$M=\frac{A+B}{2}=\frac{(1,3,-1)+(3,-1,-1)}{2}=(2,1,-1)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB}=(2,-4,0)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x-4y+D=0$$

Como queremos que pase por el punto *M*, entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x-4y+D=0 \Rightarrow 2\cdot 2-4\cdot 1+D=0 \Rightarrow D=0 \Rightarrow 2x-4y=0$$

b) Calculamos el área del triángulo *ABC*.

$\vec{AB}=(2,-4,0)$; $\vec{AC}=(4,-2,6)$.

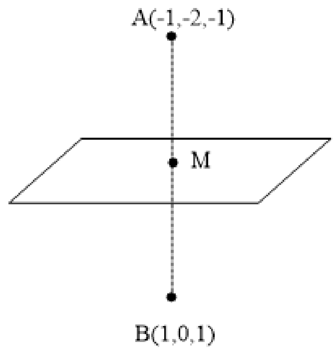
$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right|=\frac{1}{2}\ \text{módulo}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -4 & 0\\ 4 & -2 & 6\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\text{módulo}\left[-24\,\vec{i}-12\,\vec{j}+12\,\vec{k}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(-24)^2+(-12)^2+(12)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{864}=\sqrt{216}=14'69\ u^2$$

Considera los puntos $A(-1,-2,-1)$ y $B(1,0,1)$.
a) Determina la ecuación del plano respecto del cual los puntos *A* y *B* son simétricos.
b) Calcula la distancia de $P(-1,0,1)$ a la recta que pasa por los puntos *A* y *B*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos el punto *M*

$$M = \frac{A+B}{2} = \frac{(-1,-2,-1)+(1,0,1)}{2} = (0,-1,0)$$

Calculamos el vector $\overrightarrow{AB} = (2,2,2)$. Este vector es el normal del plano, luego su ecuación es:

$$2x+2y+2z+D=0$$

Como queremos que pase por el punto *M*, entonces el plano tiene de ecuación:

$$2x+2y+2z+D=0 \Rightarrow 2\cdot 0+2\cdot(-1)+2\cdot 0+D=0 \Rightarrow D=2 \Rightarrow 2x+2y+2z+2=0 \Rightarrow x+y+z+1=0$$

b) La recta que pasa por *A* y *B* tiene de ecuación: $\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2+2t \\ z=-1+2t \end{cases}$. Cualquier punto de esta recta tiene de coordenadas: $C(-1+2t,-2+2t,-1+2t)$. Calculamos el vector

$$\overrightarrow{PC}(-1+2t+1,-2+2t-0,-1+2t-1) = (2t,-2+2t,-2+2t)$$

Este vector tiene que ser perpendicular al vector director de la recta, luego:

$$\overrightarrow{PC}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (2t,-2+2t,-2+2t)\cdot(2,2,2)=0 \Rightarrow 4t-4+4t-4+4t=0 \Rightarrow t=\frac{2}{3}$$

La distancia del punto *P* a la recta es el módulo del vector $\overrightarrow{PC} = \left(\frac{4}{3},-\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$, luego:

$$d = \left|\overrightarrow{PC}\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}\right)^2} = 1'63\ u$$

Considera los puntos $A(1,1,1)$, $B(0,-2,2)$, $C(-1,0,2)$ y $D(2,-1,-2)$.
a) Calcula el volumen del tetraedro de vértices *A*, *B* , *C* y D.
b) Determina la ecuación de la recta que pasa por *D* y es perpendicular al plano determinado por los puntos *A*, *B* y *C*.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,-3,1)$; $\vec{AC}=(-2,-1,1)$ y $\vec{AD}=(1,-2,-3)$. El volumen del tetraedro será:

$$V=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1\\ -3 & -1 & -2\\ 1 & 1 & -3\end{vmatrix}=\frac{1}{6}\,|15|=\frac{15}{6}\,u^3$$

b) El vector director de la recta es el vector normal del plano, luego:

$$\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ -1 & -3 & 1\\ -2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-2\,\vec{i}-\vec{j}-5\vec{k}=(-2,-1,-5)$$

La recta que nos piden es: $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y+1}{-1}=\dfrac{z+2}{-5}$

Sea π el plano determinado por los puntos $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ y $C(0,0,\lambda)$, siendo λ un número real, y sea *r* la recta dada por $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$

a) Halla la ecuación del plano que pasa por *A* y contiene a *r*.

b) Estudia la posición relativa de *r* y π según los valores de λ.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left.\begin{array}{r} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = -3 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + t \end{array}\right\}$

La recta pasa por el punto $P = (-3,0,-3)$ y su vector director es $\vec{u} = (2,1,1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1,0,0)$, el vector $\vec{u} = (2,1,1)$ y el vector $\vec{AP} = (-4,0,-3)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -4 \\ y & 1 & 0 \\ z & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 3x - 2y - 4z - 3 = 0$$

b) Calculamos la ecuación del plano. El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (1,0,0)$ y los vectores $\vec{AB} = (-1,1,0)$ y $\vec{AC} = (0,-1,\lambda)$. Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & -1 \\ z & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda x + \lambda y + z - \lambda = 0$$

Estudiamos el sistema formado por las ecuaciones de la recta y el plano $\left.\begin{array}{r} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \\ \lambda x + \lambda y + z = \lambda \end{array}\right\}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ \lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix} = 3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}$$

	R(*A*)	R(*M*)	
$\lambda = -\frac{1}{3}$	2	3	Recta paralela al plano.
$\lambda \neq -\frac{1}{3}$	3	3	Recta secante al plano.

Considera el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,2,1)$ y el plano π de ecuación $y=0$.
a) Halla la ecuación de la recta que pasa por *P*, está contenida en π y cuyo vector director es perpendicular a $\vec{u}$.
b) Determina la ecuación del plano que pasa por *P*, es perpendicular a π y del que $\vec{u}$ es un vector director.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La recta pasa por el punto $P(-1,0,1)$ y su vector director es $\vec{v}=(a,b,c)$.

Como la recta es perpendicular a $\vec{u}=(1,2,1)$, el producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow a+2b+c=0$.
Además la recta está contenida en el plano $y=0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n}=(0,1,0)$ y el vector $\vec{v}=(a,b,c)$, también es cero, luego: $b=0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{array}{r} a+2b+c=0 \\ b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{v}=(-c,0,c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a c el valor 1, la recta será:

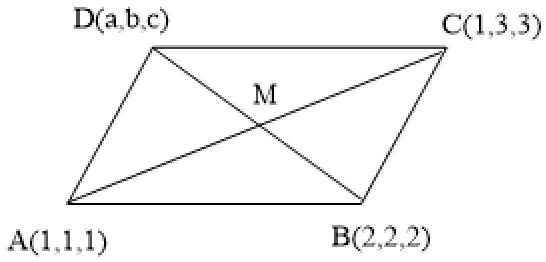
$$\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{0}=\frac{z-1}{1}$$

b) El plano que nos piden viene definido por el punto $P(-1,0,1)$, el vector $\vec{u}=(1,2,1)$ y el vector normal del plano π, $\vec{n}=(0,1,0)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x+1 & 1 & 0 \\ y & 2 & 1 \\ z-1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+z-2=0$$

Los puntos $A(1,1,1)$, $B(2,2,2)$ y $C(1,3,3)$ son vértices consecutivos del paralelogramo *ABCD*.
a) Calcula el área del paralelogramo.
b) Halla la ecuación general del plano que contiene a dicho paralelogramo.
c) Calcula las coordenadas del vértice *D*.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$ y el área del paralelogramo es:

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}=(0,-2,2)$$

$$\acute{A}rea=m\acute{o}dulo\ \left|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(0)^2+(-2)^2+(2)^2}=\sqrt{8}\ u^2$$

b) Calculamos los vectores $\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$ y $\overrightarrow{AC}=(0,2,2)$ y la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 0\\ y-1 & 1 & 2\\ z-1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow y-z=0$$

c) Calculamos las coordenadas del punto medio M

$$M=\frac{A+C}{2}\Rightarrow M=\frac{(1,1,1)+(1,3,3)}{2}=(1,2,2)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M=\frac{B+D}{2}\Rightarrow(1,2,2)=\frac{(2,2,2)+(a,b,c)}{2}\Rightarrow D=(0,2,2)$$

Considera el punto $P(0,1,1)$ y la recta r dada por $\left\{\begin{array}{r} x-2y=-5 \\ z=2 \end{array}\right.$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r.
b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

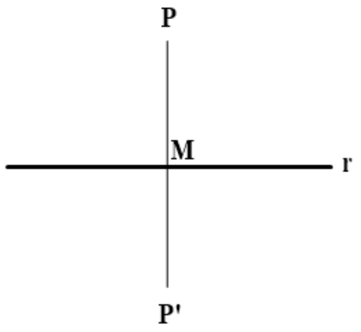
a) La ecuación del haz de planos es: $x-2y+5+k(z-2)=0$.

Como queremos el plano que pasa por $P(0,1,1)$, tenemos que:

$$0-2\cdot 1+5+k(1-2)=0 \Rightarrow k=3$$

luego, el plano es: $x-2y+5+3(z-2)=0 \Rightarrow x-2y+3z-1=0$

b)



Pasamos la recta r a paramétricas: $\left\{\begin{array}{r} x-2y=-5 \\ z=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-5+2t \\ y=t \\ z=2 \end{array}\right.$, con lo cual:

$$M=(-5+2t,t,2) \text{ ; } \vec{u}=(2,1,0)$$

Para calcular el simétrico del punto $P=(0,1,1)$ respecto de la recta, el vector $\vec{PM}=(-5+2t,t-1,1)$ y el vector $\vec{u}=(2,1,0)$ tienen que ser perpendiculares, luego:

$$\vec{PM}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (-5+2t,t-1,1)\cdot(2,1,0)=0 \Rightarrow -10+4t+t-1=0 \Rightarrow t=\frac{11}{5} \Rightarrow M=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right)$$

El punto simétrico cumple que:

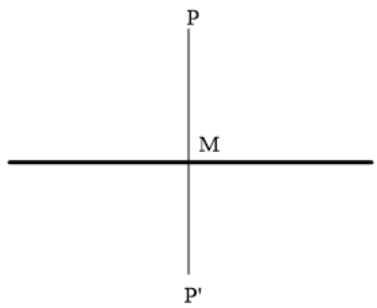
$$\frac{P+P'}{2}=M \Rightarrow \left(\frac{0+a}{2},\frac{1+b}{2},\frac{1+c}{2}\right)=\left(-\frac{3}{5},\frac{11}{5},2\right) \Rightarrow P'=\left(-\frac{6}{5},\frac{17}{5},3\right)$$

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ y la recta *r* dada por $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2}$.

a) Determina el punto simétrico de *P* respecto de *r*.
b) Calcula el punto de *r* que equidista de *P* y *Q*.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Pasamos la recta a paramétricas: $x-5=y=\dfrac{z+2}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x=5+t \\ y=t \\ z=-2-2t \end{cases}$.

Cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas $M(5+t,t,-2-2t)$. Queremos que el vector $\overrightarrow{PM}=(5+t-1,t-0,-2-2t+1)=(4+t,t,-1-2t)$ sea perpendicular al vector director de la recta $\vec{u}=(1,1,-2)$, luego, su producto escalar tiene que valer cero.

$$\overrightarrow{PM}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (4+t,t,-1-2t)\cdot(1,1,-2)=0 \Rightarrow -6-6t=0 \Rightarrow t=-1$$

Luego, el punto *M* es: $M=(4,-1,0)$.

Si llamamos al punto simétrico $P'=(a,b,c)$, se cumple que:

$$\frac{(1,0,-1)+(a,b,c)}{2}=(4,-1,0) \Rightarrow P'=(7,-2,1)$$

b) Cualquier punto *A* de la recta tiene de coordenadas: $A(5+t,t,-2-2t)$. Buscamos el que equidista de *P* y *Q*, por lo tanto, el módulo del vector $\overrightarrow{PA}=(4+t,t,-1-2t)$ tiene que ser igual al módulo del vector $\overrightarrow{QA}=(3+t,t-1,-3-2t)$

$$\left|\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{QA}\right| \Rightarrow \sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}=\sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t=9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t \Rightarrow$$

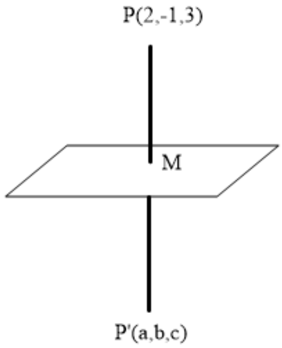
$$\Rightarrow 6t^2+12t+17=6t^2+16t+19 \Rightarrow -4t=2 \Rightarrow t=-\frac{1}{2}$$

Luego, el punto A de la recta que equidista de P y Q es: $A=\left(5-\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{2},-2+2\cdot\dfrac{1}{2}\right)=\left(\dfrac{9}{2},-\dfrac{1}{2},-1\right)$

Considera el punto $P(2,-1,3)$ y el plano π de ecuación $3x+2y+z=5$.
a) Calcula el punto simétrico de P respecto de π.
b) Calcula la distancia de P a π.
MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Con el vector normal del plano $\vec{n}=(3,2,1)$ y el punto *P*, calculamos la recta que pasa por *P* y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x=2+3t \\ y=-1+2t \\ z=3+t \end{cases}$$

Calculamos el punto *M*, punto de corte de la recta con el plano

$$3\cdot(2+3t)+2\cdot(-1+2t)+(3+t)=5 \Rightarrow 14t=-2 \Rightarrow t=-\frac{1}{7}$$

Luego, el punto *M* es: $M=\left(2-\frac{3}{7},-1-\frac{2}{7},3-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M=\frac{P+P'}{2} \Rightarrow \left(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7}\right)=\frac{(2,-1,3)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{22}{7}=a+2 \Rightarrow a=\frac{8}{7} \\ -\frac{18}{7}=b-1 \Rightarrow b=-\frac{11}{7} \\ \frac{40}{7}=c+3 \Rightarrow c=\frac{19}{7} \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $P'\left(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7}\right)$

b) La distancia es el módulo del vector $\overrightarrow{PM}=\left(\frac{11}{7}-2,-\frac{9}{7}+1,\frac{20}{7}-3\right)=\left(-\frac{3}{7},-\frac{2}{7},-\frac{1}{7}\right)$

$$d(P,\pi)=\left|\overrightarrow{PM}\right|=\sqrt{\left(-\frac{3}{7}\right)^2+\left(-\frac{2}{7}\right)^2+\left(-\frac{1}{7}\right)^2}=\frac{\sqrt{14}}{7}=0'534\ u$$

Se considera el plano π de ecuación $x+2y+z=6$.
a) Determina la recta perpendicular a π que pasa por el origen de coordenadas.
b) Halla el punto simétrico del origen de coordenadas con respecto de π.
c) Calcula el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Con el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2,1)$ y el punto $O=(0,0,0)$, calculamos la recta que pasa por *O* y es perpendicular al plano.

$$r \equiv \begin{cases} x=t \\ y=2t \\ z=t \end{cases}$$

b) Calculamos el punto *M*, punto de corte de la recta con el plano

$$1\cdot(t)+2\cdot(2t)+1\cdot(t)=6 \Rightarrow 6t=6 \Rightarrow t=1$$

Luego, el punto *M* es: $M=(1,2,1)$

Calculamos las coordenadas del simétrico

$$M=\frac{O+O'}{2} \Rightarrow (1,2,1)=\frac{(0,0,0)+(a,b,c)}{2} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=4 \\ c=2 \end{cases}$$

Luego, el punto simétrico es $O'(2,4,2)$.

c) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados.

Corte con el eje OX $\Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0,0)$
Corte con el eje OY $\Rightarrow y=3 \Rightarrow B(0,3,0)$
Corte con el eje OZ $\Rightarrow z=6 \Rightarrow C(0,0,6)$

El volumen del tetraedro es $\frac{1}{6}$ del volumen del paralelepípedo que determinan los tres vectores, $\overrightarrow{OA}=(6,0,0)$; $\overrightarrow{OB}=(0,3,0)$; $\overrightarrow{OC}=(0,0,6)$, es decir:

$$V=\frac{1}{6}\ Valor\ absoluto\ de \begin{vmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}=\frac{108}{6}=18\ u^3$$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por

$$r \equiv x-2 = y-2 = z \qquad \text{y} \qquad s \equiv \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4+t \\ z = mt \end{cases}$$

a) Determina m para que *r* y *s* sean paralelas.
b) Halla, si existe, un valor de *m* para el que ambas rectas sean la misma.
c) Para $m = 1$, calcula la ecuación del plano que contiene a *r* y a *s*
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a paramétricas $r \equiv x-2 = y-2 = z \Rightarrow \begin{cases} x = 2+t \\ y = 2+t \Rightarrow A = (2,2,0) \;\; ; \;\; \vec{u} = (1,1,1) \\ z = t \end{cases}$

$$s \equiv \begin{cases} x = 4+t \\ y = 4+t \Rightarrow B = (4,4,0) \;\; ; \;\; \vec{v} = (1,1,m) \\ z = mt \end{cases}$$

Si las rectas son paralelas, los vectores tienen que ser linealmente dependientes, es decir, sus componentes tienen que ser proporcionales.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{m} \Rightarrow m = 1$$

b) Vemos que el punto $B = (4,4,0)$ de la recta *s*, no verifica la ecuación de la recta *r*

$$4-2 = 4-2 \neq 0$$

Por lo tanto, no hay ningún valor de *m* para el cual las rectas sean coincidentes.

c) El plano que nos piden viene definido por el punto $A = (2,2,0)$ y los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\overrightarrow{AB} = (2,2,0)$. Luego, la ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-2 & 1 & 2 \\ y-2 & 1 & 2 \\ z & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x+2y-8 = 0 \Rightarrow x-y+4 = 0$$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por: $r \equiv \begin{cases} x+y = z+4 \\ x+2y = 7 \end{cases}$ **y** $s \equiv \begin{cases} x-2=0 \\ y+3=0 \end{cases}$

a) Estudia y determina la posición relativa de *r* y s.

b) Calcula la recta perpendicular común a *r* y a *s*.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x+y-z = 4 \\ x+2y = 7 \\ x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3-t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \\ z = s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (1+2t, 3-t, t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2, -3, s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (1-2t, -6+t, s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (1-2t, -6+t, s-t) \cdot (2,-1,1) = 0 \Rightarrow 8-6t+s = 0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (1-2t, -6+t, s-t) \cdot (0,0,1) = 0 \Rightarrow s-t = 0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t = \frac{8}{5}$; $s = \frac{8}{5}$

La recta que nos piden viene definida por: $A = \left(\frac{21}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}\right)$ y $\vec{AB} = \left(-\frac{11}{5}, -\frac{22}{5}, 0\right)$. Su ecuación es:

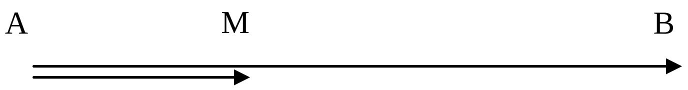
$$\frac{x - \frac{21}{5}}{-\frac{11}{5}} = \frac{y - \frac{7}{5}}{-\frac{22}{5}} = \frac{z - \frac{8}{5}}{0}$$

Considera los puntos $A(2,-1,-2)$ y $B(-1,-1,2)$, y la recta r dada por $x-1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$

a) Determina los puntos del segmento AB que lo dividen en 3 segmentos de la misma longitud.
b) Determina un punto C de r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en C.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a)



Observamos la siguiente igualdad entre vectores $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AM}$, y como $\overrightarrow{AB}=(-3,0,4)$ y $\overrightarrow{AM}=(x-2,y+1,z+2)$, obtenemos: $(-3,0,4)=(3x-6,3y+3,3z+6)\Rightarrow x=1; y=-1; z=-\dfrac{2}{3}$, es decir el punto M es $M=\left(1,-1,-\dfrac{2}{3}\right)$

También se observa que el punto N es el punto medio del segmento MB, es decir:

$$N=\frac{M+B}{2}=\left(\frac{1-1}{2},\frac{-1-1}{2},\frac{-\frac{2}{3}+2}{2}\right)=\left(0,-1,\frac{2}{3}\right)$$

b) Escribimos la recta r en forma paramétrica $r\equiv x-1=\dfrac{y-1}{-1}=\dfrac{z-1}{2}\Rightarrow\begin{cases}x=1+t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}$

Cualquier punto C de la recta r tiene de coordenadas $C=(1+t,1-t,1+2t)$. Calculamos los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CA}$.

$$\overrightarrow{CB}=(-2-t,-2+t,1-2t) \text{ y } \overrightarrow{CA}=(1-t,-2+t,-3-2t)$$

El producto escalar debe valer cero ya que son perpendiculares, luego:

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CA}=0\Rightarrow(-2-t,-2+t,1-2t)\cdot(1-t,-2+t,-3-2t)=6t^2+t+1=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}\ ;\ t=-\frac{1}{2}$$

Luego el punto C puede ser:

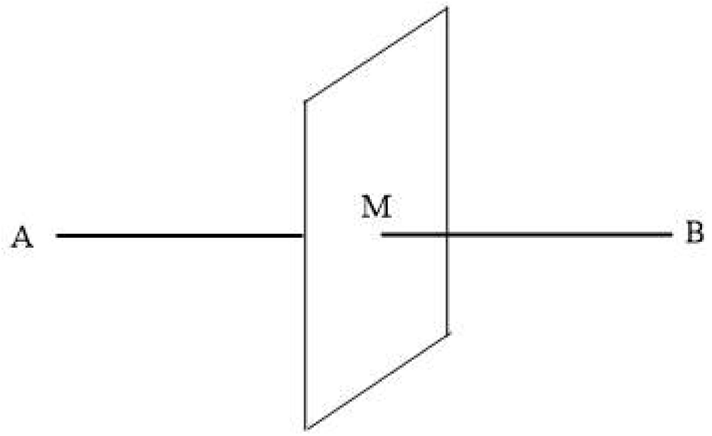
$$\text{Si } t=\frac{1}{3}\Rightarrow C_1=\left(1+\frac{1}{3},1-\frac{1}{3},1+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$$

$$\text{Si } t=-\frac{1}{2}\Rightarrow C_2=\left(1-\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},1-1\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},0\right)$$

Se sabe que los puntos $A(-1,2,6)$ y $B(1,4,-2)$ son simétricos respecto de un plano π .
a) Calcula la distancia de A a π .
b) Determina la ecuación general del plano π .
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

b) El plano que nos piden es un plano perpendicular al segmento *AB* y que pasa por su punto medio *M*.



El vector $\vec{AB} = (2,2,-8)$ es el vector normal del plano, luego:

$$2x+2y-8z+D=0$$

como tiene que pasar por el punto medio $M=(0,3,2)$, tenemos que el plano pedido es:

$$2x+2y-8z+D=0 \Rightarrow 2\cdot 0+2\cdot 3-8\cdot 2+D=0 \Rightarrow D=10 \Rightarrow 2x+2y-8z+10=0 \Rightarrow x+y-4z+5=0$$

a) La distancia de *A* a π es el módulo del vector $\vec{AM}=(1,1,-4)$, luego:

$$d(A,\pi)=\left|\vec{AM}\right|=\sqrt{1+1+16}=\sqrt{18}\ u$$

Considera las rectas *r* y *s* dadas por $r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a *r* y a *s*.
b) Calcula la distancia entre las rectas dadas.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 2 - s \\ y = s \\ z = 2 \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A = (2t,1,0)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B = (2-s, s, 2)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB} = (2 - s - 2t, s - 1, 2)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (2 - s - 2t, s - 1, 2) \cdot (1,0,0) = 0 \Rightarrow 2 - s - 2t = 0$$
$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow (2 - s - 2t, s - 1, 2) \cdot (-1,1,0) = 0 \Rightarrow -2 + s + 2t + s - 1 = 0 \Rightarrow 2s + 2t - 3 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $t = \frac{1}{2}$; $s = 1$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1,1,0) \ ; \ B = (1,1,2)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A = (1,1,0)$ y $\vec{AB} = (0,0,2)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{2}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB} = (0,0,2)$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(0)^2 + (0)^2 + 2^2} = 2 \ u$$

Sea r la recta que pasa por los puntos $A(3,6,7)$ y $B(7,8,3)$ y sea s la recta dada por

$$\begin{cases} x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$$

a) Determina la posición relativa de r y s.
b) Calcula la distancia entre r y s.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

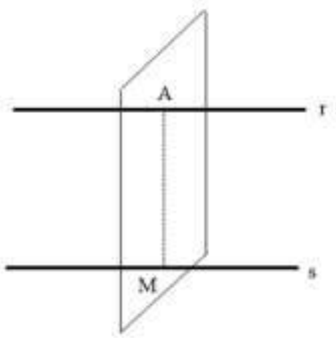
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta r. $\dfrac{x-3}{4}=\dfrac{y-6}{2}=\dfrac{z-7}{-4} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-9 \\ x+z=10 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x-2y=-9 \\ x+z=10 \\ x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema. Como sale que el rango(A) = 2 y el rango (M) = 3, las dos rectas son paralelas.

b) Calculamos un plano perpendicular a r y que pasa por A

$$4x+2y-4z+D=0 \Rightarrow 4\cdot 3+2\cdot 6-4\cdot 7+D=0 \Rightarrow D=4 \Rightarrow 4x+2y-4z+4=0 \Rightarrow 2x+y-2z+2=0$$



Calculamos el punto M, punto de corte de la recta s con el plano.

$$\left.\begin{array}{r} x-4y-z=-10 \\ 3x-4y+z=-2 \\ 2x+y-2z=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -10 \\ 3 & -4 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 & -10 \\ 0 & 8 & 4 & 28 \\ 0 & 9 & 0 & 18 \end{pmatrix} \Rightarrow x=1\ ;\ y=2\ ;\ z=3$$

La distancia viene dada por el módulo del vector $\overrightarrow{AM}=(-2,-4,-4)$

$$d(r,s)=\left|\overrightarrow{AM}\right|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2+(-4)^2}=6\ u$$

a) Determina la ecuación del plano que pasa por el punto $A(0,1,0)$ y es perpendicular a la recta r dada por $x+1=\frac{y+2}{2}=z-1$

b) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano de ecuación $2x+3y+4z=12$ con los ejes coordenados.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta, luego todos los planos perpendiculares a la recta tendrán de ecuación: $x+2y+z+D=0$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el punto A, luego:

$$x+2y+z+D=0 \Rightarrow 1\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 0+D=0 \Rightarrow D=-2 \Rightarrow x+2y+z-2=0$$

b) Calculamos los puntos de corte del plano con los ejes coordenados: $A=(6,0,0)$; $B=(0,4,0)$; $C=(0,0,3)$. Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-6,4,0)$ y $\vec{AC}=(-6,0,3)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -6 & 4 & 0 \\ -6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 12\vec{i}+18\vec{j}+24\vec{k}$

Área del triángulo = $\frac{1}{2}\, módulo\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{12^2+18^2+24^2}=\frac{1}{2}\sqrt{1044}=\sqrt{261}=16,15\ u^2$

Considera las rectas $\boldsymbol{r \equiv \frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3}}$ **y** $\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}}$

a) Estudia y determina la posición relativa de *r* y s.

b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos las ecuaciones implícitas de la recta *r*: $\frac{x+1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x-2z=-1 \end{cases}$

Formamos el sistema con las ecuaciones de las dos rectas: $\begin{cases} x-2y=-1 \\ 3x-2z=-1 \\ 2x-3y=-5 \\ y-2z=-1 \end{cases}$ y calculamos el rango de la matriz de los coeficientes y el de la matriz ampliada del sistema.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 6 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_3]{F_2-6F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -26 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow R(A)=3$$

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -2 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4-F_3]{F_2-6F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_4-F_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} \Rightarrow R(M)=4$$

Como sale que el rango(A) = 3 y el rango (M) = 4, las dos rectas se cruzan.

b) Calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A=(-1,0,-1) \\ \vec{u}=(2,1,3) \end{cases} \quad ; \quad s \equiv \begin{cases} x=-4+3t \\ y=-1+2t \\ z=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=(-4,-1,0) \\ \vec{v}=(3,2,1) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula: $d(r,s)=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\cdot(\vec{u}\wedge\vec{v})\right|}{\left|\vec{u}\wedge\vec{v}\right|}=\left|\frac{\begin{vmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\textit{módulo}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}\right|=\frac{9}{\sqrt{75}}=1'039\,u$

Considera las rectas $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{m} = z$ y $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$

a) Halla los valores de *m* y *n* para los que *r* y *s* se corten perpendicularmente.

b) Para $m = 3$ y $n = 1$, calcula la ecuación general del plano que contiene a *r* y a *s*.

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + mt \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1,-1,0) \ ; \ \vec{u} = (2, m, 1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - ns \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2,-3,0) \ ; \ \vec{v} = (-n, 1, 1)$$

Los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son perpendiculares, luego: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow -2n + m + 1 = 0$

Las dos rectas se tienen que cortar en un punto, luego: $Rango\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = Rango\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right) = 2$, por lo tanto:

$$\begin{vmatrix} 2 & m & 1 \\ -n & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 3 + 4 = 0 \Rightarrow -3m + 2n + 7 = 0$$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que:

$$\left. \begin{array}{r} -2n + m + 1 = 0 \\ -3m + 2n + 7 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow m = 4 \ ; \ n = \frac{5}{2}$$

b) Estudiamos la posición de las rectas cuando $m = 3$ y $n = 1$.

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + 3t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A = (1,-1,0) \ ; \ \vec{u} = (2,3,1)$$

$$s \equiv \begin{cases} x = -2 - s \\ y = -3 + s \\ z = s \end{cases} \Rightarrow B = (-2,-3,0) \ ; \ \vec{v} = (-1,1,1)$$

Calculamos el $Rango\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AB}\right)$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -9 + 2 + 3 + 4 = 0 \Rightarrow Rango = 2 \Rightarrow \text{ Se cortan en un punto}$$

Luego, el plano viene determinado por el punto *A* y los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -1 \\ y+1 & 3 & 1 \\ z & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 3y + 5z - 5 = 0$$