Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\, dx$.

Sugerencia: Efectúa el cambio $\sqrt{x} = t$

MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $\sqrt{x} = t$, vamos a calcular los nuevos límites de integración.

Si $x = \pi^2 \Rightarrow \sqrt{\pi^2} = t \Rightarrow t = \pi$

Si $x = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = t \Rightarrow t = 0$

Vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = dt \Rightarrow dx = 2t\, dt$$

Hacemos la integral por partes. Sustituyendo, nos queda:

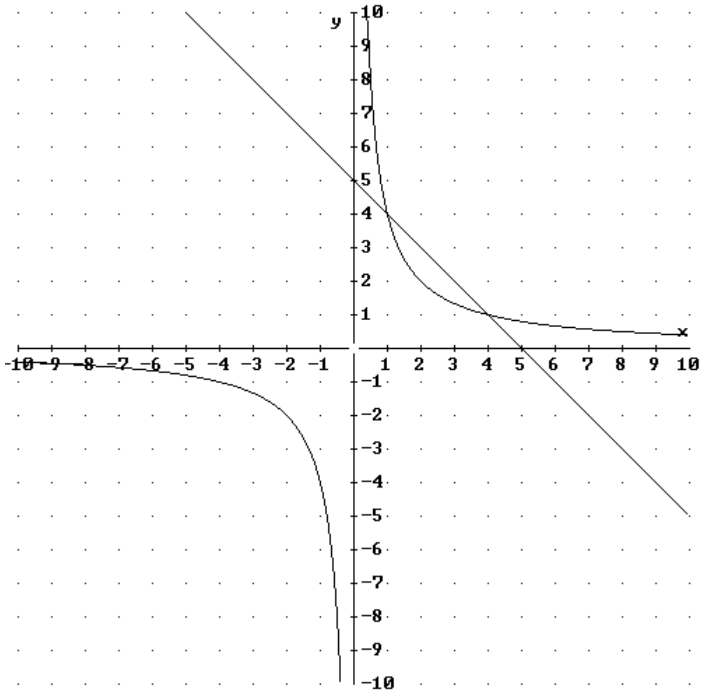
$$\int_0^{\pi} 2t \cdot sen\, t\, dt = \left[-2t \cos t + 2\int \cos t\, dt \right] = \left[-2t\cos t + 2\, sen\, t \right]_0^{\pi} = \left(-2\pi \cos \pi + 2 sen\, \pi \right) - (2 sen\, 0) = 2\pi$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = 2t;\ du = 2\ dt \\ dv = sen\, t\, dt;\ v = -\cos t \end{array}}$$

Considera la función *f* dada por $f(x)=5-x$ y la función *g* definida como $g(x)=\frac{4}{x}$ para $x\neq 0$.
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de *f* y *g* indicando sus puntos de corte.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2010. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x)=5-x$ es una recta, luego podemos dibujarla fácilmente con una tabla de valores. La función $g(x)=\frac{4}{x}$ es una hipérbola, la podemos dibujar dando 3 ó 4 valores a la derecha y a la izquierda de 0.



Vemos que las dos funciones se cortan en los puntos $(1,4)$ y $(4,1)$

b) El área de la región pedida es:

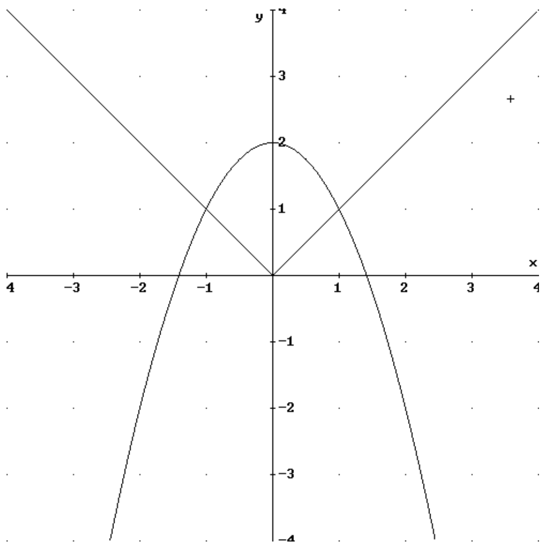
$$A=\int_1^4 (5-x-\frac{4}{x})\,dx=\left[5x-\frac{x^2}{2}-4\ln x\right]_1^4=\left(20-8-4\ln 4\right)-\left(5-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{2}-4\ln 4\ u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por: $f(x) = 2 - x^2$ y $g(x) = |x|$
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = 2 - x^2$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $(0,2)$ y corta al eje X en los puntos $\left(\sqrt{2}, 0\right)$ y $\left(-\sqrt{2}, 0\right)$.

La función $g(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3^er^ cuadrante.



b)

$$A = 2 \cdot \int_0^1 \left[(2 - x^2) - x \right] dx = 2 \cdot \left[2x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 2\left(2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{7}{3}\ u^2$$

Dada la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln x$, donde ln es la función logaritmo neperiano, se pide:
a) Comprueba que la recta de ecuación $y=-e\,x+1+e^2$ es la recta normal a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=e$.
b) Calcula el área de la región limitada por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta normal del apartado (a).
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

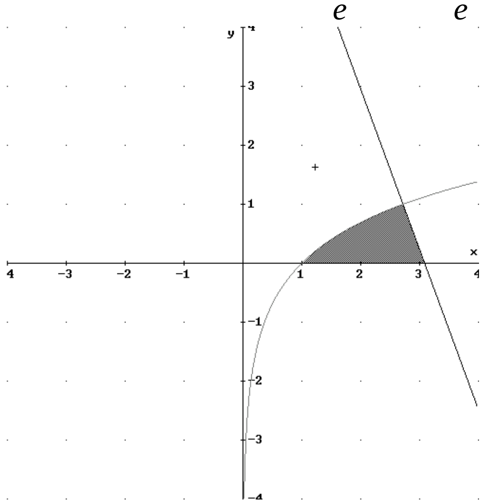
a) Calculamos la derivada de la función: $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

La ecuación de la recta normal es:

$$y-f(e)=-\frac{1}{f'(e)}(x-e)\Rightarrow y-\ln e=-\frac{1}{\frac{1}{e}}(x-e)\Rightarrow y-1=-e(x-e)\Rightarrow y=-ex+e^2+1$$

b) Calculamos el punto de corte de la normal con el eje X.

$$0=-ex+e^2+1\Rightarrow x=\frac{e^2+1}{e}=e+\frac{1}{e}$$



El área que nos piden es:

$$A=\int_1^e(\ln x)\,dx+\int_e^{e+\frac{1}{e}}(1+e^2-ex)\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^e+\left[x+e^2x-\frac{ex^2}{2}\right]_e^{e+\frac{1}{e}}=$$

$$=\left[(e-e)-(-1)\right]+\left[\left(e+\frac{1}{e}+e^2\left(e+\frac{1}{e}\right)-\frac{e\left(e+\frac{1}{e}\right)^2}{2}\right)-\left(e+e^3-\frac{e^3}{2}\right)\right]=1+\frac{1}{2e}\ u^2$$

Sea $f:(-2,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+2)$. Halla una primitiva F de f que verifique $F(0)=0$. (ln denota logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$F(x)=\int \ln(x+2)\ dx = x\ln(x+2)-\int \frac{x}{x+2}dx = x\ln(x+2)-\int\left(1-\frac{2}{x+2}\right)dx = x\ln(x+2)-x+2Ln(x+2)+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+2);\ du=\dfrac{1}{x+2}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Calculamos el valor de la constante C.

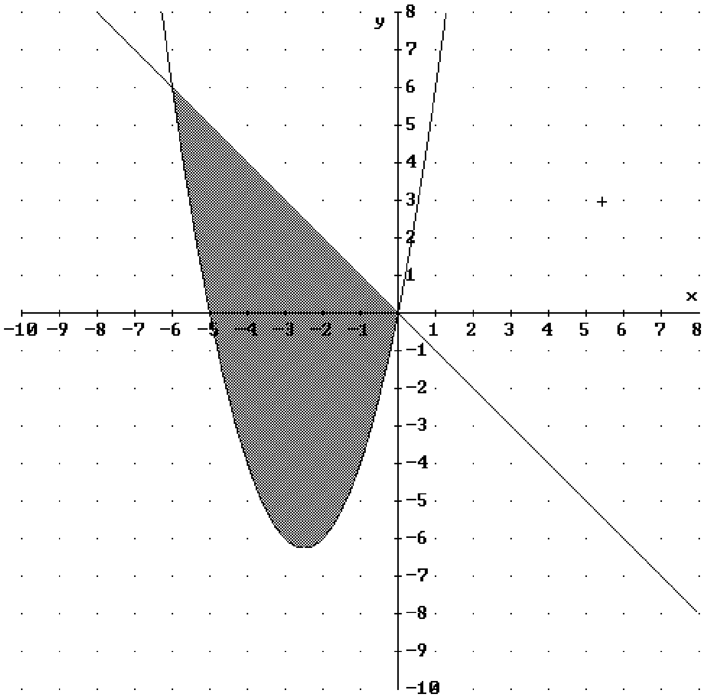
$$F(0)=0\Rightarrow 0=0\cdot\ln(0+2)-0+2Ln(0+2)+C\Rightarrow C=-2\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=x\ln(x+2)-x+2Ln(x+2)-2\ln 2$

Calcula el valor de $a>0$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y=x^2+ax$ y la recta $y+x=0$ vale 36 unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x \\ y=x^2+ax \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(1+a)x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=-1-a \ .$$

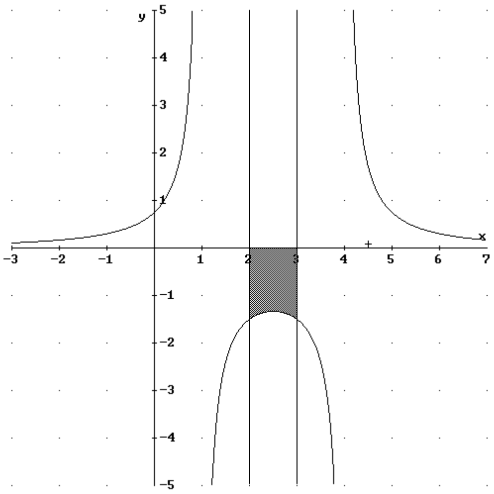
$$36=\int_{-1-a}^{0} (-x-x^2-ax)\,dx=\left[-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{ax^2}{2}\right]_{-1-a}^{0}=-\left[-\frac{(-1-a)^2}{2}-\frac{(-1-a)^3}{3}-\frac{a(-1-a)^2}{2}\right]=$$

$$=\frac{a^3+3a^2+3a+1}{6} \Rightarrow a^3+3a^2+3a+1=216 \Rightarrow a^3+3a^2+3a-215=0 \Rightarrow a=5$$

Dada la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{3}{x^2-5x+4}$ para $x\neq 1$ y $x\neq 4$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas, y las rectas $x=2$, $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de la gráfica.



Calculamos la integral $\displaystyle\int \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-5x+4=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=4$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{3}{x^2-5x+4}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x-4}=\frac{A(x-4)+B(x-1)}{(x-1)(x-4)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A* y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=1\Rightarrow 3=-3A\Rightarrow A=-1$

$x=4\Rightarrow 3=3B\Rightarrow B=1$

Con lo cual:

$$\int \frac{3}{x^2-5x+4}\,dx=\int \frac{-1}{x-1}\,dx+\int \frac{1}{x-4}\,dx=-\ln(x-1)+\ln(x-4)$$

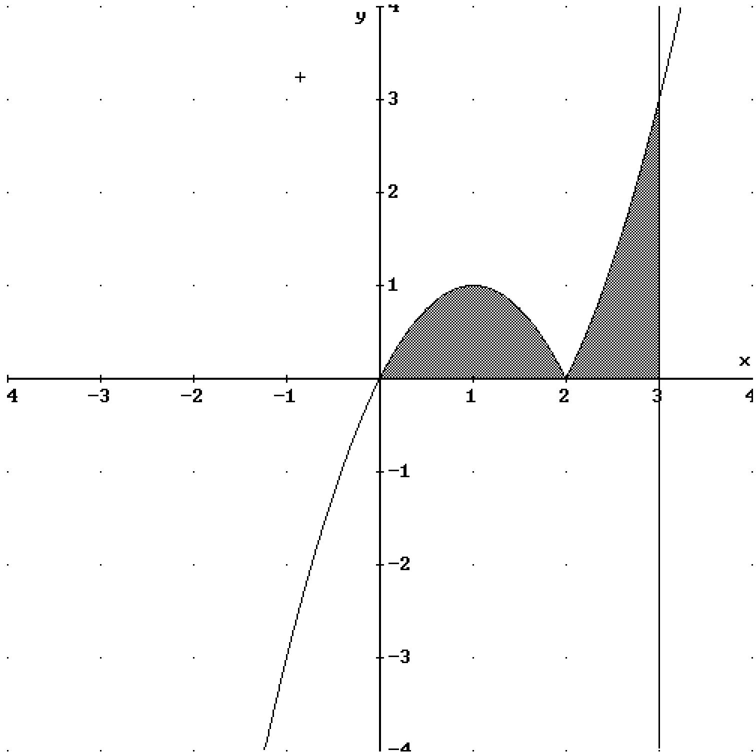
$$A=-\int_2^3 \frac{3}{x^2-5x+4}=-\Big[-\ln|x-1|+\ln|x-4|\Big]_2^3=-\left(-\ln 2+\ln 1\right)+\left(-\ln 1+\ln 2\right)=2\ln 2\ u^2$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x\,|\,2-x\,|$.
a) Esboza su gráfica.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y la recta de ecuación $x=3$.
MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=x\,|\,2-x\,|=\begin{cases} 2x-x^2 & si \quad x<2 \\ x^2-2x & si \quad x\geq 2 \end{cases}$.

Hacemos el dibujo de las dos parábolas en sus intervalos.



b) Según vemos en la figura el área que nos piden es:

$$A=\int_0^2(-x^2+2x)\,dx+\int_2^3(x^2-2x)\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}\right]_0^2+\left[\frac{x^3}{3}-\frac{2x^2}{2}\right]_2^3=$$

$$=\left[\left(-\frac{8}{3}+4\right)-0\right]+\left[(9-9)-\left(\frac{8}{3}-4\right)\right]=\frac{8}{3}\,u^2$$

Sea la función f dada por $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 0$. Determina una primitiva F de f tal que $F(1)=1$.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral $\int \frac{1}{x^2+x}\,dx=\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+Bx}{x(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=0\Rightarrow 1=A$

$x=-1\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$

Con lo cual:

$$F(x)=\int \frac{1}{x^2+x}\,dx=\int \frac{1}{x(x+1)}\,dx=\int \frac{1}{x}\,dx-\int \frac{1}{(x+1)}\,dx=\ln|x|-\ln|x+1|+C$$

Como $F(1)=1\Rightarrow 1=\ln|1|-\ln|1+1|+C\Rightarrow C=1+\ln 2$

Luego la primitiva que nos piden es: $F(x)=\ln|x|-\ln|x+1|+1+\ln 2$

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=x^2-2x+3$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2+1$.

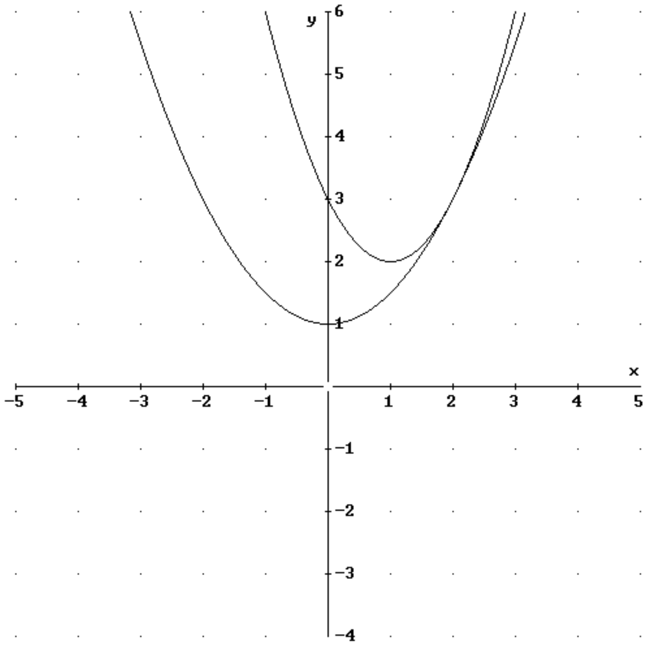
a) Esboza las gráficas de *f* y *g*, y halla su punto de corte.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y el eje de ordenadas.

MATEMÁTICAS II. 2010. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos parábolas.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

$$x^2-2x+3=\frac{1}{2}x^2+1 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow x=2$$

b) El área de la región pedida es:

$$A=\int_0^2 (x^2-2x+3-\frac{1}{2}x^2-1)\,dx=\int_0^2 (\frac{1}{2}x^2-2x+2)\,dx=\left[\frac{x^3}{6}-x^2+2x\right]_0^2=\left(\frac{8}{6}-4+4\right)=\frac{8}{6}\,u^2$$

Calcula $I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\, dx$.
a) Expresa I haciendo el cambio de variable $t^2 = e^{-x}$.
b) Determina I.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t^2 = e^{-x}$, vamos a calcular cuanto vale dx:

$$2t\,dt = -e^{-x}\,dx \Rightarrow dx = -\frac{2t\,dt}{e^{-x}} = -\frac{2t\,dt}{t^2} = -\frac{2\,dt}{t}$$

$$I = \int \frac{5}{1+\sqrt{e^{-x}}}\, dx = \int \frac{5}{1+t}\left(-\frac{2}{t}\right) dt = \int \frac{-10}{t(1+t)}\, dt$$

b) Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{-10}{t(1+t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{1+t} = \frac{A(1+t)+Bt}{t(1+t)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A, y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$t = 0 \Rightarrow -10 = A \Rightarrow A = -10$
$t = -1 \Rightarrow -10 = -B \Rightarrow B = 10$

Con lo cual:

$$\int \frac{-10}{t(1+t)}\, dt = \int \frac{-10}{t}\, dt + \int \frac{10}{1+t}\, dt = -10\ln t + 10\ln(1+t) = -10\ln\left|\sqrt{e^{-x}}\right| + 10\ln\left|1+\sqrt{e^{-x}}\right| + C$$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^2+4$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de ordenadas y la recta de ecuación $y=2x+3$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2010. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

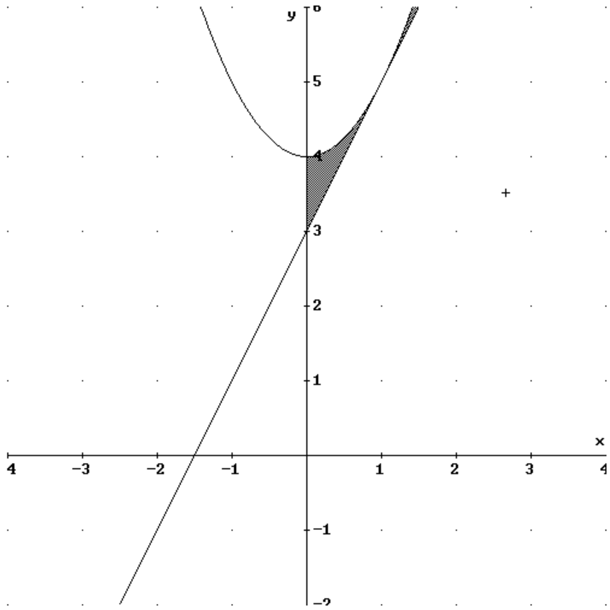
a) La ecuación de la recta tangente es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$.

$f(1)=1+4=5$

$f'(x)=2x\Rightarrow f'(1)=2$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-5=2\cdot(x-1)\Rightarrow y=2x+3$

b) Hacemos el dibujo del recinto.



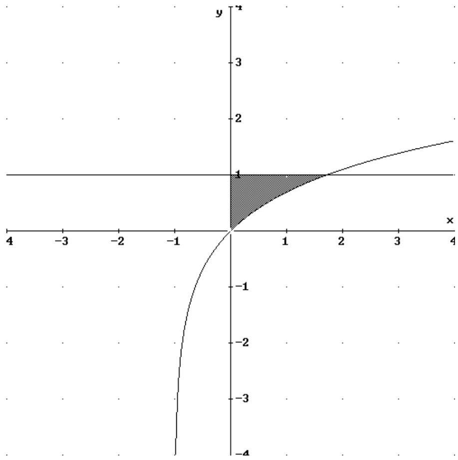
El área de la región pedida es:

$$A=\int_0^1(x^2+4-2x-3)\,dx=\int_0^1(x^2-2x+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^1=\left(\frac{1}{3}-1+1\right)=\frac{1}{3}\,u^2$$

Sea $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\ln(x+1)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano.
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje OY y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte de las gráficas.
b) Halla el área del recinto anterior
MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a)



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y=1 \\ y=\ln(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow \ln(x+1)=1 \Rightarrow e^1=x+1 \Rightarrow x=e-1 \Rightarrow A=(e-1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=\ln(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y=\ln 1=0 \Rightarrow B=(0,0)$$

b) Vamos a calcular la integral $I_1=\int ln(x+1)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(x+1);\ du=\dfrac{1}{x+1}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

$$I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-I_2$$

La integral $I_2=\int\frac{x}{x+1}\,dx$ es una integral racional

$$I_2=\int\frac{x}{x+1}\,dx=\int\left(1+\frac{-1}{x+1}\right)dx=x-ln(x+1)$$

Sustituyendo, nos queda: $I_1=\int ln(x+1)\,dx=x\cdot ln(x+1)-\int\frac{x}{x+1}\,dx=x\cdot ln(x+1)-x+ln(x+1)$

Una vez que hemos calculado la integral indefinida, ahora resolvemos la que nos proponía el problema.

$$A=\int_0^{e-1}\left(1-ln(x+1)\right)dx=\left[x-x\cdot ln(x+1)+x-\ln(x+1)\right]_0^{e-1}=e-2\ u^2$$

Halla: $\displaystyle\int \frac{e^{x}}{(e^{2x}-1)(e^{x}+1)}\,dx$

Sugerencia: efectúa el cambio de variable $t=e^{x}$

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

$e^{x}=t \Rightarrow e^{x}dx=dt$

$$\int \frac{e^{x}}{(e^{2x}-1)(e^{x}+1)}\,dx=\int \frac{1}{(t^{2}-1)(t+1)}\,dt=\int \frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}\,dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{C}{(t+1)^{2}}=\frac{A(t+1)^{2}+B(t-1)(t+1)+C(t-1)}{(t-1)(t+1)^{2}}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B y C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$t=1 \Rightarrow 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4}$$

$$t=-1 \Rightarrow 1=-2C \Rightarrow C=-\frac{1}{2}$$

$$t=0 \Rightarrow 1=\frac{1}{4}-B+\frac{1}{2} \Rightarrow B=-\frac{1}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{(t-1)(t+1)^{2}}\,dt=\int \frac{\frac{1}{4}}{t-1}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{4}}{t+1}\,dt+\int \frac{-\frac{1}{2}}{(t+1)^{2}}\,dt=\frac{1}{4}\ln(t-1)-\frac{1}{4}\ln(t+1)+\frac{1}{2(t+1)}+C=$$

$$=\frac{1}{4}\ln(e^{x}-1)-\frac{1}{4}\ln(e^{x}+1)+\frac{1}{2(e^{x}+1)}+C$$

Determina la función $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=\dfrac{1}{x}$ y su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int \frac{1}{x}\,dx=\ln x+C$$

$$f(x)=\int(\ln x+C)\,dx=x\ln x-x+Cx+D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(1,1)\Rightarrow 1=1\cdot\ln 1-1+C+D\Rightarrow D=2$

- Tangente horizontal $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 0=\ln 1+C\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=x\ln x-x+2$

Calcula $\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx=\int x\,dx+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1\ ;\ x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2x}{x^2+x-2}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2}=\frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 2=3A \Rightarrow A=\frac{2}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^3+x^2}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{2x}{x^2+x-2}\,dx=\frac{x^2}{2}+\int \frac{\frac{2}{3}}{(x-1)}\,dx+\int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)}\,dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

Calcula el valor de $b > 0$, sabiendo que el área de la región comprendida entre la curva $y = \sqrt{x}$ y la recta $y = bx$ es de $\frac{4}{3}$ unidades cuadradas.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$\sqrt{x} = bx \Rightarrow x = b^2x^2 \Rightarrow b^2x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = \frac{1}{b^2}$$

$$A = \frac{4}{3} = \int_0^{\frac{1}{b^2}} \left(\sqrt{x} - bx\right) dx = \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{bx^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{b^2}} = \frac{2\left(\frac{1}{b^2}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} - \frac{b\left(\frac{1}{b^2}\right)^2}{2} = \frac{2}{3b^3} - \frac{1}{2b^3} = \frac{1}{6b^3} \Rightarrow b^3 = \frac{1}{8} \Rightarrow b = \frac{1}{2}$$

Sea $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x(1-\ln(x))$, donde ln denota la función logaritmo neperiano. Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $P(1,1)$.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1-\ln x;\ du=-\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=x\,dx;\ v=\dfrac{x^2}{2} \end{array}}$$

$$I=\int x(1-ln\,x)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}\right)\cdot(1-ln\,x)-\int -\frac{1}{x}\cdot\frac{x^2}{2}\,dx=\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{2}ln\,x+\frac{1}{4}x^2+C=\frac{3}{4}x^2-\frac{x^2}{2}ln\,x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,1)$.

$$F(x)=\frac{3x^2}{4}-\frac{x^2}{2}ln\,x+C\Rightarrow 1=\frac{3}{4}-\frac{1}{2}ln1+C\Rightarrow C=\frac{1}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{3x^2}{4}-\dfrac{x^2}{2}ln\,x+\dfrac{1}{4}$

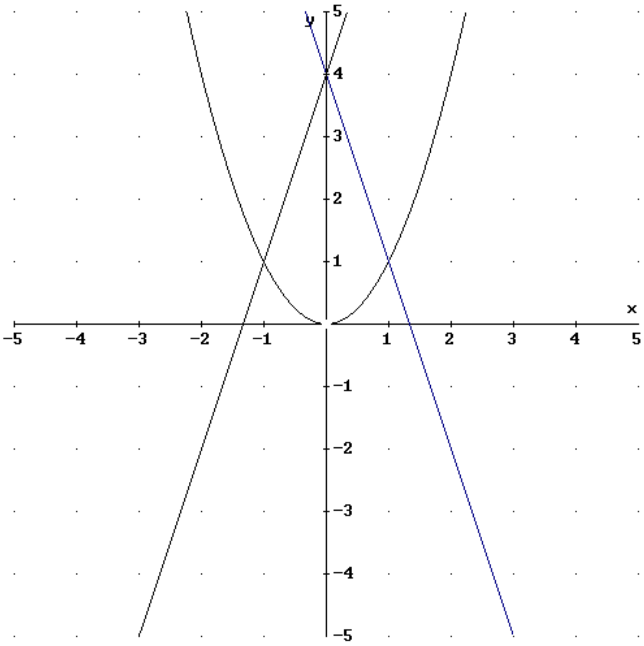
Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x)=4-3|x|$ y $g(x)=x^2$.
a) Esboza las gráficas de *f* y *g*. Determina sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función *f*.

$$f(x)=4-3|x|=\begin{cases}4+3x & si \quad x<0\\ 4-3x & si \quad x\geq 0\end{cases}$$

Las dos funciones son fáciles de representar. Su dibujo es:



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones.

Si $x<0$, entonces: $x^2=4+3x\Rightarrow x^2-3x-4=0\Rightarrow x=4$; $x=-1$. Sólo nos interesa la solución negativa $x=-1$.

Si $x>0$, entonces: $x^2=4-3x\Rightarrow x^2+3x-4=0\Rightarrow x=1$; $x=-4$. Sólo nos interesa la solución positiva $x=1$.

Luego, los puntos de corte son: $(-1,1)$ y $(1,1)$.

b) El área de la región pedida es:

$$A=2\int_0^1(4-3x-x^2)\,dx=2\cdot\left[4-\frac{3x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\cdot\left(4-\frac{3}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{13}{3}\;u^2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \; dx$

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos primero la integral por partes

$$\int x \cdot \cos x \, dx = x \cdot sen\, x - \int sen\, x \, dx = x \cdot sen\, x + \cos x$$

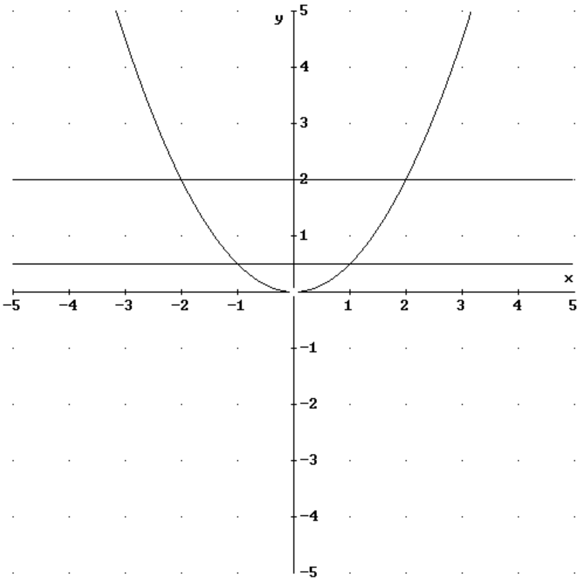
$$\boxed{\begin{array}{l} u = x; \;\; du = dx \\ dv = \cos x \, dx; \; v = sen\, x \end{array}}$$

Ahora, calculamos la integral que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \cos x \, dx = \left[x \cdot sen\, x + \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Calcula un número positivo *a*, menor que 2, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación $y=\frac{1}{2}x^2$ y las dos rectas horizontales de ecuaciones $y=a$ e $y=2$, tenga un área de $\frac{14}{3}$ unidades cuadradas.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N



Calculamos el área encerrada por la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=2$.

$$Área = 2\cdot\int_0^2 (2-\frac{1}{2}x^2)\,dx = 2\cdot\left[2x-\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = 2\cdot\left[4-\frac{8}{6}\right] = \frac{16}{3}\ u^2$$

Calculamos los puntos de corte de la parábola $y=\frac{1}{2}x^2$ y la recta $y=a$.

$$x^2=2a \Rightarrow x=\pm\sqrt{2a}$$

$$A = 2\cdot\int_0^{\sqrt{2a}} (a-\frac{1}{2}x^2)\,dx = 2\cdot\left[ax-\frac{x^3}{6}\right]_0^{\sqrt{2a}} = 2\cdot\left[a\sqrt{2a}-\frac{2a\sqrt{2a}}{6}\right] = \frac{4}{3}a\sqrt{2a}$$

Se tiene que cumplir que: $\frac{16}{3}-\frac{4}{3}a\sqrt{2a}=\frac{14}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}=\frac{4a\sqrt{2a}}{3} \Rightarrow 1=2a\sqrt{2a} \Rightarrow 1=8a^3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$

Dada la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=-2x^2+3x-1$
a) Prueba que las rectas $y=-x+1$ e $y=3x-1$ son tangentes a su gráfica.
b) Halla el área del recinto limitado por la gráfica de f y las rectas mencionadas en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Para ver que las rectas son tangentes a la parábola tenemos que comprobar que sólo se cortan en un punto.
Calculamos los puntos de corte de $f(x)=-2x^2+3x-1$ e $y=-x+1$

$$-2x^2+3x-1=-x+1\Rightarrow 2x^2-4x+2=0\Rightarrow x=1$$

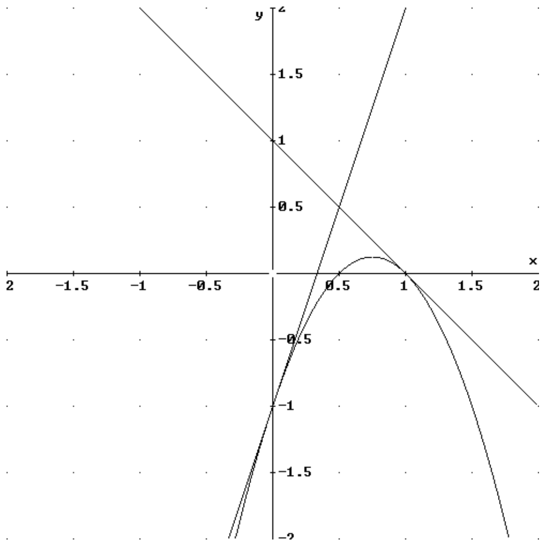
Luego es tangente.

Calculamos los puntos de corte de $f(x)=-2x^2+3x-1$ e $y=3x-1$

$$-2x^2+3x-1=3x-1\Rightarrow 2x^2=0\Rightarrow x=0$$

Luego es tangente.

b) Hacemos un dibujo para ver más claramente el área que nos piden.



$$Área=\int_0^{\frac{1}{2}}(3x-1+2x^2-3x+1)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-x+1+2x^2-3x+1)\,dx=$$

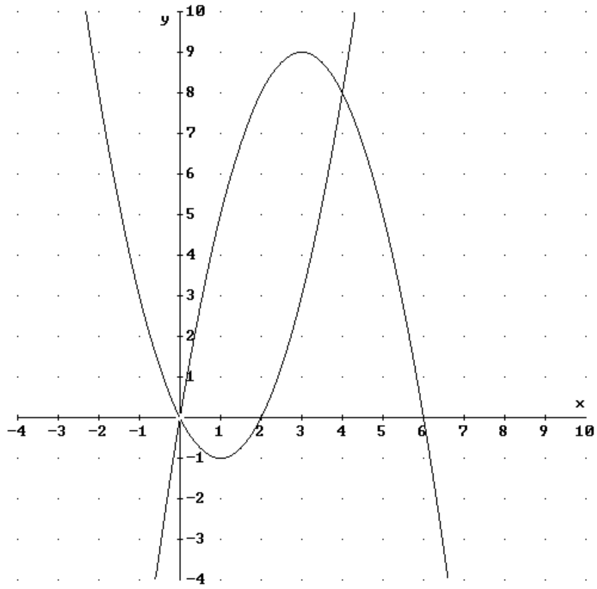
$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x^2)\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(2x^2-4x+2)\,dx=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{2x^3}{3}-2x^2+2x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=$$

$$=\left[\frac{1}{12}\right]+\left[\frac{2}{3}-2+2\right]-\left[\frac{1}{12}-\frac{1}{2}+1\right]=\frac{1}{6}\,u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.
a) Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones son fáciles de dibujar, ya que son dos parábolas. Basta con hacer una tabla de valores calculando previamente el vértice de cada una de ellas.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left.\begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array}\right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_0^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x) \right] dx = \int_0^4 \left[8x - 2x^2 \right] dx = \left[4x^2 - \frac{2x^3}{3} \right]_0^4 = \left[64 - \frac{128}{3} \right] = \frac{64}{3} \ u^2$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -\frac{1}{4}x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.
b) Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

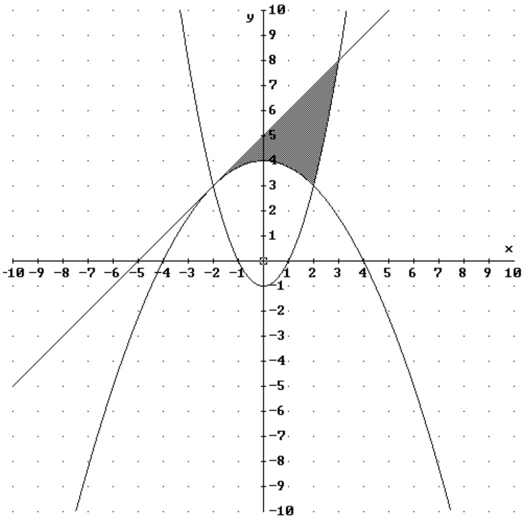
R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente es: $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2)$

$$f(-2) = -\frac{1}{4} \cdot 4 + 4 = 3$$
$$f'(x) = -\frac{x}{2} \Rightarrow f'(-2) = 1$$

Luego, $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x + 2) \Rightarrow y - 3 = 1 \cdot (x + 2) \Rightarrow y = x + 5$

b) Dibujamos las dos parábolas y la recta tangente.



Calculamos el área que nos piden

$$A = \int_{-2}^{2} \left[(x+5) - (-\frac{x^2}{4} + 4) \right] dx + \int_{2}^{3} \left[(x+5) - (x^2 - 1) \right] dx =$$

$$= \int_{-2}^{2} \left[\frac{x^2}{4} + x + 1) \right] dx + \int_{2}^{3} \left[-x^2 + x + 6 \right] dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_{2}^{3} = \frac{16}{3} + \frac{13}{6} = \frac{15}{2} \ u^2$$

Sea *f* una función continua en el intervalo $\left[2,3\right]$ y *F* una función primitiva de *f* tal que , $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcula:

a) $\int_2^3 f(x)\,dx$

b) $\int_2^3 \left(5f(x)-7\right)dx$

c) $\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 \cdot f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) $\int_2^3 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_2^3 = F(3)-F(2) = 2-1=1$

b) $\int_2^3 \left(5f(x)-7\right)dx = 5\int_2^3 f(x)\,dx - 7\int_2^3 dx = 5\cdot 1 - 7\cdot\left[x\right]_2^3 = 5-7(3-2) = -2$

c) $\int_2^3 \left(F(x)\right)^2 \cdot f(x)\,dx = \left[\frac{\left(F(x)\right)^3}{3}\right]_2^3 = \frac{\left(F(3)\right)^3}{3} - \frac{\left(F(2)\right)^3}{3} = \frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$

Sea la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{2}{x^2-1}$ para $x\neq -1$ y $x\neq 1$.

a) Halla una primitiva de *f*.

b) Calcula el valor de *k* para que el área del recinto limitado por el eje de abscisas y la gráfica de *f* en el intervalo $[2,k]$ sea $\ln 2$, donde ln denota el logaritmo neperiano.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las raíces del denominador son: $x^2-1=0\Rightarrow x=-1$; $x=1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{x^2-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1\Rightarrow 2=2A\Rightarrow A=1$$

$$x=-1\Rightarrow 2=-2B\Rightarrow B=-1$$

Con lo cual: $\displaystyle\int \frac{2}{x^2-1}\,dx=\int\frac{1}{x-1}\,dx+\int\frac{-1}{x+1}\,dx=\ln(x-1)-\ln(x+1)+C$

b)

$$A=\ln 2=\int_2^k \frac{2}{x^2-1}\,dx=\left[\ln(x-1)-\ln(x+1)\right]_2^k=\ln\frac{k-1}{k+1}+\ln 3$$

Resolvemos la ecuación logarítmica:

$$\ln 2=\ln\frac{k-1}{k+1}+\ln 3\Rightarrow \ln\frac{2}{3}=\ln\frac{k-1}{k+1}\Rightarrow\frac{2}{3}=\frac{k-1}{k+1}\Rightarrow 2k+2=3k-3\Rightarrow k=5$$

Sean $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = sen\ x$ y $g(x) = \cos\ x$, respectivamente.

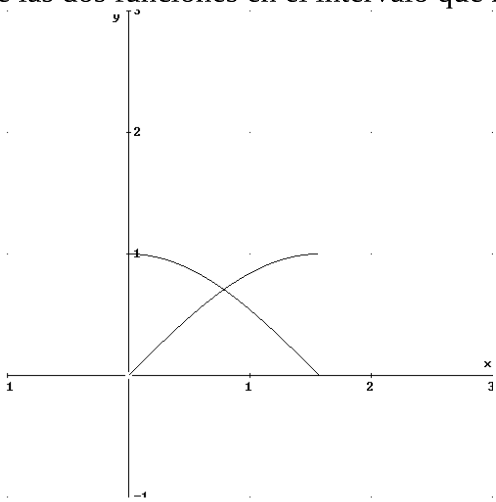
a) Realiza un esbozo de las gráficas de *f* y *g* en el intervalo $\left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

b) Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$

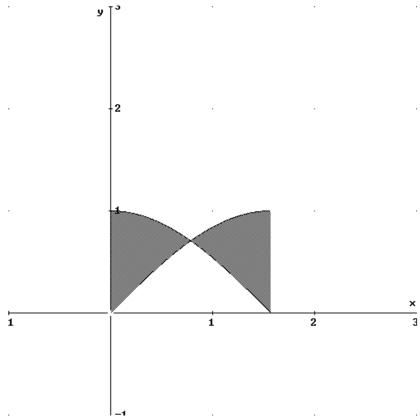
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Representamos gráficamente las dos funciones en el intervalo que nos dan:



b) El área que nos piden son los dos recintos coloreados:



Calculamos el área

$$Área = A_1 + A_2 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - sen\, x)\ dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (sen\, x - \cos x)\ dx = \left[sen\, x + \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \left[-\cos x - sen\, x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[sen\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right] - \left[sen\,0 + \cos 0\right] + \left[-\cos\frac{\pi}{2} - sen\frac{\pi}{2}\right] - \left[-\cos\frac{\pi}{4} - sen\frac{\pi}{4}\right] = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 - 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$$= 2\sqrt{2} - 2\ u^2$$

Sea f la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^2\cos x$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2\cos x\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2\cos x\,dx=x^2 sen\,x-2\int x\cdot sen\,x\,dx=x^2 sen\,x-2\left[-x\cdot\cos x+\int\cos x\,dx\right]=$$
$$=x^2 sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+C$$

$u=x^2;\ du=2x\ dx$
$dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x$

$u=x;\ du=dx$
$dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x$

$$F(x)=x^2\cdot sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+C$$

Como nos piden una primitiva que pase por $(\pi,0)\Rightarrow F(\pi)=0$, luego sustituyendo podemos calcular el valor de C.

$$0=\pi^2\cdot sen\,\pi+2\pi\cdot\cos\pi-2sen\,\pi+C\ \Rightarrow 0=-2\pi+C\Rightarrow\ C=2\pi$$

Por lo tanto, la función primitiva que nos piden es: $F(x)=x^2\cdot sen\,x+2x\cdot\cos x-2\,sen\,x+2\pi$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=x^3-4x$
a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y=-x-2$, determinando los puntos de corte de ambas gráficas.
c) Calcula el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

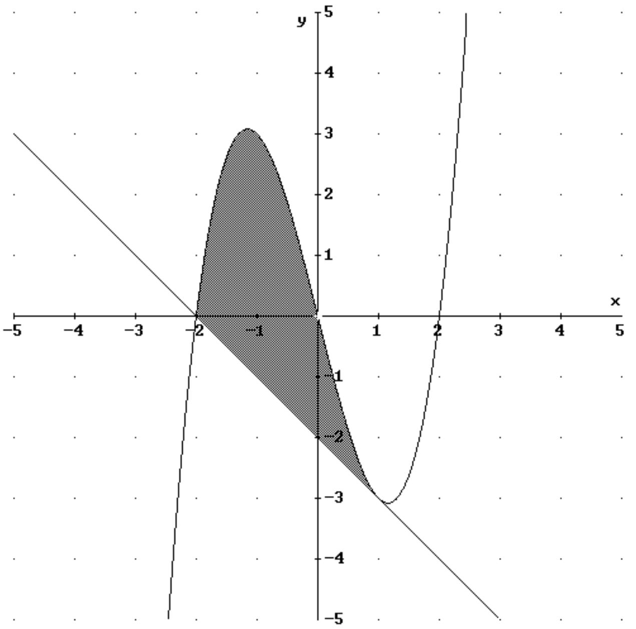
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=-3$$
$$f'(x)=3x^2-4\Rightarrow f'(1)=3(1)^2-4=-1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y+3=-1\cdot(x-1)\Rightarrow y=-x-2$

b) Hacemos un esbozo.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^3-4x=-x-2\Rightarrow x^3-3x+2=0\Rightarrow x=1\ ;\ x=-2$$

Luego, los puntos de corte son: $(1,-3)$ y $(-2,0)$
c)

$$A=\int_{-2}^{1}\left[(x^3-4x)-(-x-2)\right]dx=\int_{-2}^{1}\left[x^3-3x+2\right]dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{3x^2}{2}+2x\right]_{-2}^{1}=$$
$$=\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2\right)-\left(\frac{16}{4}-\frac{12}{2}-4\right)=\frac{27}{4}u^2$$

Sea $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = x^2 - 2x$ y $g(x) = -x^2 + 4x$, respectivamente.
a) Halla los puntos de corte de sus gráficas y realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

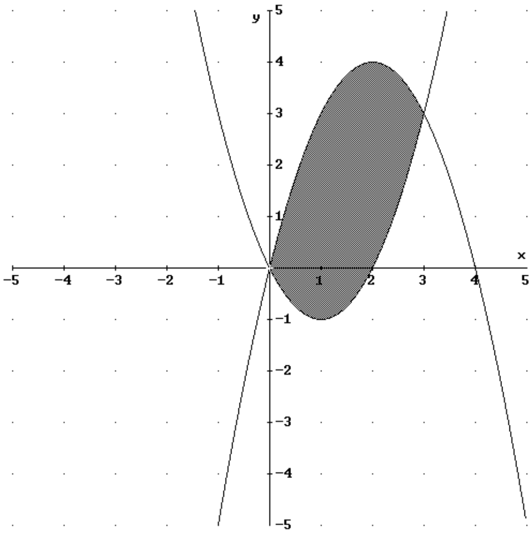
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x^2 - 2x = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \; ; \; x = 3$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(3,3)$

Hacemos un esbozo.



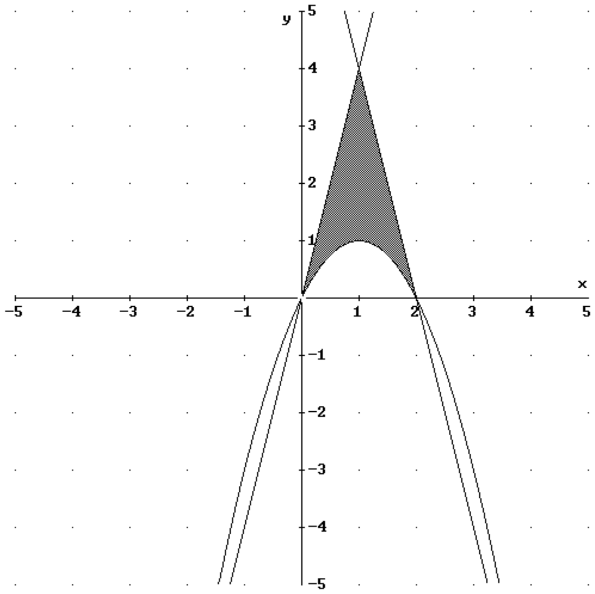
b)

$$A = \int_0^3 \left[(-x^2 + 4x) - (x^2 - 2x)\right] dx = \int_0^3 \left[-2x^2 + 6x\right] dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{6x^2}{2}\right]_0^3 = \left(-\frac{54}{3} + \frac{54}{2}\right) - (0) = 9u^2$$

Se considera el recinto del plano situado en el primer cuadrante limitado por las rectas $y=4x$, $y=8-4x$ y la curva $y=2x-x^2$.
a) Realiza un esbozo de dicho recinto.
b) Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo.



b) $A=2\cdot\int_0^1\left[(4x)-(2x-x^2)\right]dx=2\cdot\int_0^1\left[2x+x^2\right]dx=2\cdot\left[\frac{2x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1=2\cdot\left(\frac{2}{2}+\frac{1}{3}\right)-\left(0\right)=\frac{8}{3}u^2$

Calcula los valores de a y b sabiendo que la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^2+b\ln(x)$, donde ln denota la función logaritmo neperiano, tiene un extremo relativo en $x=1$ y que $\int_1^4 f(x)dx=27-8\ln 4$.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como tiene un extremo relativo en $x=1$, se cumple que $f'(1)=0$, luego:

$$f'(x)=2ax+\frac{b}{x}\Rightarrow f'(1)=2a\cdot 1+\frac{b}{1}=0\Rightarrow b=-2a$$

Calculamos la integral: Previamente calculamos por partes la integral de ln(x)

$$f(x)=\int \ln x\, dx = x\ln x - x$$

$$\int_1^4 ax^2-2a\ln(x)dx=\left[\frac{ax^3}{3}-2a(x\ln x-x)\right]_1^4=\left(\frac{64a}{3}-8a\ln 4+8a\right)-\left(\frac{a}{3}+2a\right)=27-8a\ln 4\Rightarrow a=1$$

Luego, los valores son: $a=1$; $b=-2$

Sea la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(1-x^2)e^{-x}$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(-1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=1-x^2;\ du=-2x\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$I=\int(1-x^2)e^{-x}\,dx=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\int x\cdot e^{-x}\,dx$$

Volvemos a hacer la integral que nos queda por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$I=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\int x\cdot e^{-x}\,dx=-e^{-x}\cdot(1-x^2)-2\left[-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx\right]=$$
$$=-e^{-x}\cdot(1-x^2)+2xe^{-x}+2e^{-x}+C=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(-1,0)$.

$$F(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)+C\Rightarrow F(-1)=0\Rightarrow F(-1)=-e^{-1}(1-2+1)+C=0\Rightarrow C=0$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=e^{-x}\cdot(x^2+2x+1)$

Sean las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=\dfrac{x^2}{4}$ y $g(x)=2\sqrt{x}$ respectivamente.
a) Halla los puntos de corte de las gráficas de f y g. Realiza un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

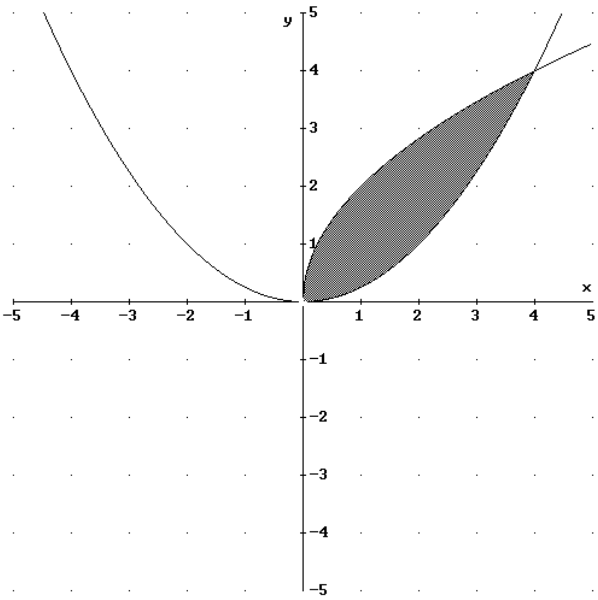
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$\frac{x^2}{4}=2\sqrt{x}\Rightarrow\frac{x^4}{16}=4x\Rightarrow x^4-64x\Rightarrow x=0\ ;\ x=4$$

Luego, los puntos de corte son: $(0,0)$ y $(4,4)$

Hacemos un esbozo.



b) $A=\displaystyle\int_0^4\left[(2\sqrt{x})-(\frac{x^2}{4})\right]dx=\int_0^4\left[2x^{\frac{1}{2}}-\frac{x^2}{4}\right]dx=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{12}\right]_0^4=\left(\frac{2\sqrt{64}}{\frac{3}{2}}-\frac{64}{12}\right)-(0)=\frac{16}{3}u^2$

Sea $I=\int_0^1 \frac{x}{1+\sqrt{1-x}}\,dx$.

a) Expresa la integral *I* aplicando el cambio de variable $t=\sqrt{1-x}$.

b) Calcula el valor de *I*.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t=\sqrt{1-x}$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$dt=\frac{-1}{2\sqrt{1-x}}dx=\frac{-1}{2t}dx \Rightarrow dx=-2t\,dt$$

$$t=\sqrt{1-x}\Rightarrow t^2=1-x\Rightarrow x=1-t^2$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=0\Rightarrow t=1$$

$$x=1\Rightarrow t=0$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I=\int_1^0 \frac{(1-t^2)}{1+t}\cdot(-2t\,dt)=\int_1^0 \frac{(1+t)(1-t)}{1+t}\cdot(-2t\,dt)=\int_1^0 -2t(1-t)\,dt=\int_1^0 (-2t+2t^2)\,dt$$

b) Calculamos el valor de *I*

$$I=\int_1^0 (-2t+2t^2)\,dt=\left[-\frac{2t^2}{2}+\frac{2t^3}{3}\right]_1^0=0-\left(-1+\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{9-x^2}{4}$.

a) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.

b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $x+2y=5$ y el eje de abscisas. Calcula el área de dicho recinto.

MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=1$ es: $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

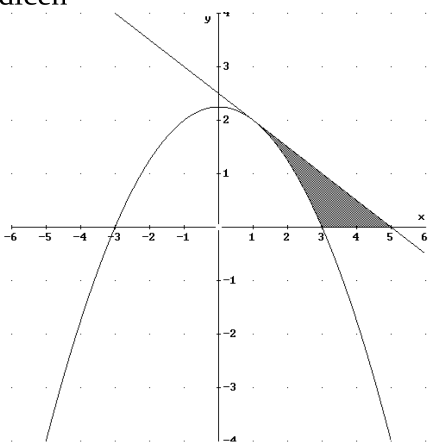
Calculamos: $f(1)=\dfrac{9-1}{4}=2$

$$f'(x)=\frac{-2x}{4}=\frac{-x}{2}\Rightarrow f'(1)=-\frac{1}{2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)\Rightarrow y-2=-\frac{1}{2}(x-1)\Rightarrow x+2y-5=0$$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos el área del recinto

$$A=\int_1^3\left(\frac{5-x}{2}-\frac{9-x^2}{4}\right)dx+\int_3^5\left(\frac{5-x}{2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{x^2-2x+1}{4}\right)dx+\int_3^5\left(\frac{5-x}{2}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{\frac{x^3}{3}-x^2+x}{4}\right]_1^3+\left[\frac{5x-\frac{x^2}{2}}{2}\right]_3^5=\left(\frac{9-9+3}{4}\right)-\left(\frac{\frac{1}{3}-1+1}{4}\right)+\left(\frac{25-\frac{25}{2}}{2}\right)-\left(\frac{15-\frac{9}{2}}{2}\right)=$$

$$=\frac{2}{3}+1=\frac{5}{3}\ u^2$$

Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas mediante

$$f(x) = |x(x-2)| \quad \text{y} \quad g(x) = x+4$$

a) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes. Calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por gráficas de *f* y *g*.

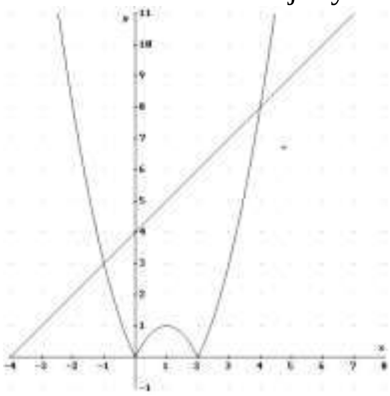
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Lo primero que hacemos es abrir la función *f(x)*, para que nos resulte más sencillo dibujarla y después calcular el área que nos piden.

$$f(x) = |x(x-2)| = \begin{cases} x^2 - 2x & si\ x < 0 \\ -x^2 + 2x & si\ 0 \le x \le 2 \\ x^2 - 2x & si\ x > 2 \end{cases}$$

La función *f(x)* son tres ramas de parábola fáciles de dibujar y la función *g(x)* es una recta.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones:

$$x+4 = x^2 - 2x \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1 \ ; \ x = 4$$

Luego, los puntos de corte son: $(-1,3)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área.

$$A = \int_{-1}^{0} \left[(x+4) - (x^2 - 2x) \right] dx + \int_{0}^{2} \left[(x+4) - (-x^2 + 2x) \right] dx + \int_{2}^{4} \left[(x+4) - (x^2 - 2x) \right] dx =$$

$$= \int_{-1}^{0} (-x^2 + 3x + 4) dx + \int_{0}^{2} (x^2 - x + 4) dx + \int_{2}^{4} (-x^2 + 3x + 4) dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 4x \right]_{0}^{2} + \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{2}^{4} = \frac{13}{6} + \frac{26}{3} + \frac{22}{3} = \frac{109}{6}\ u^2$$

Sea $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=ln(x^2+1)$ (donde ln denota el logaritmo neperiano). Calcula la primitiva de *g* cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2013. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral de $g(x)$, por partes:

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=Ln(1+x^2);\ du=\dfrac{2x}{1+x^2}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

La integral que nos queda es una integral racional, hacemos la división y nos queda:

$$\int Ln(1+x^2)\ dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int\frac{2x^2}{1+x^2}dx = x\cdot Ln(1+x^2)-\int 2\,dx+\int\frac{2}{1+x^2}dx =$$
$$= x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x+C$$

De todas las primitivas de $g(x)$

$$G(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x+C$$

nos piden la que pasa por el punto $(0,0)$, luego:

$$G(0)=0\cdot Ln(1+0^2)-2\cdot 0+2\,arc\,tg\ 0+C=0\Rightarrow C=0$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es: $G(x)=x\cdot Ln(1+x^2)-2x+2\,arc\,tg\ x$

De la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo relativo en $x=1$, un punto de inflexión en $(0,0)$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4}$. Calcula *a, b, c* y *d*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera y segunda derivada de la función.

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \;\; ; \;\; f''(x)=6ax+2b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Máximo en $x=1 \Rightarrow f'(1)=0 \Rightarrow 3a+2b+c=0$

- Punto de inflexión en $(0,0) \Rightarrow \begin{cases} Pasa \;\; por \;\; (0,0) \Rightarrow d=0 \\ f''(0)=0 \Rightarrow b=0 \end{cases}$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=\frac{5}{4} \Rightarrow \int_0^1 (ax^3+cx)\,dx=\left[\frac{ax^4}{4}+\frac{cx^2}{2}\right]_0^1=\frac{a}{4}+\frac{c}{2}=\frac{5}{4}$

Resolviendo el sistema formado por estas ecuaciones sale: $a=-1$; $b=0$; $c=3$; $d=0$

Calcula $\displaystyle\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular primero la integral indefinida, que es una integral racional y, como el numerador y el denominador tienen igual grado, lo que hacemos es la división de los dos polinomios y la descomponemos en:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \int 1\,dx + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-6x+5=0 \Rightarrow x=1$; $x=5$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{6x-5}{x^2-6x+5} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-5} = \frac{A(x-5)+B(x-1)}{(x-1)(x-5)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow 1=-4A \Rightarrow A=-\frac{1}{4}$$

$$x=5 \Rightarrow 25=4B \Rightarrow B=\frac{25}{4}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{6x-5}{x^2-6x+5}\,dx = x + \int \frac{-\frac{1}{4}}{x-1}\,dx + \int \frac{\frac{25}{4}}{x-5}\,dx = x - \frac{1}{4}\ln|x-1| + \frac{25}{4}\ln|x-5|$$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_2^4 \frac{x^2}{x^2-6x+5}\,dx = \left[x-\frac{1}{4}\ln|x-1|+\frac{25}{4}\ln|x-5|\right]_2^4 = \left(4-\frac{1}{4}\ln 3+\frac{25}{4}\ln 1\right)-\left(2-\frac{1}{4}\ln 1+\frac{25}{4}\ln 3\right) = 2-\frac{13}{2}\ln 3$$

Halla $\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{x+1}{1+\sqrt{x}}\,dx=\int \frac{t^2+1}{1+t}2tdt=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,dt$$

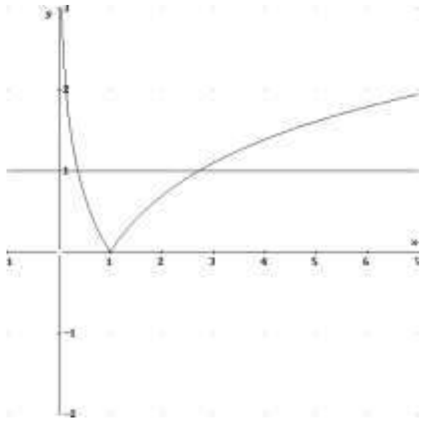
Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I=\int \frac{2t^3+2t}{1+t}\,dt=\int\left(2t^2-2t+4-\frac{4}{1+t}\right)dt=\frac{2t^3}{3}-t^2+4t-4\ln|1+t|=\frac{2(\sqrt{x})^3}{3}-x+4\sqrt{x}-4\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

Sea $g:(0,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=|\ln x|$ (donde ln denota el logaritmo neperiano).
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y=1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.
b) Calcula el área del recinto anterior.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x|=1\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\ -\ln x=1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[1-(-\ln x)\right]\,dx+\int_{1}^{e}\left[1-(\ln x)\right]\,dx=\left[x+x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x-x\ln x+x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{e}+e-2\ u^{2}$$

Recuerda que la integral de ln$x$ es por partes:

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx$

$dv=dx;\ v=x$

Sea $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x}}$

Determina la primitiva de g cuya gráfica pasa por el punto $P(1,0)$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t\Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int\frac{1}{x+\sqrt{x}}\,dx=\int\frac{2t}{t+t^2}\,dt=\int\frac{2}{1+t}\,dt=2\ln|1+t|=2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$$

Calculamos la que pasa por el punto $P(1,0)$

$$0=2\ln\left|1+\sqrt{1}\right|+C\Rightarrow C=-2\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|-2\ln 2$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sen(2x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x\, sen(2x)\, dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, sen(2x)\, dx=\left[-x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\, dx=\left[-\frac{x\cos 2x}{2}+\frac{sen\, 2x}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ \ du=dx \\ dv=sen\, 2x\, dx;\ v=-\dfrac{\cos 2x}{2} \end{array}}$$

Sean *f* y *g* las funciones definidas por $f(x)=2-x$ y $g(x)=\dfrac{2}{x+1}$ para $x\neq -1$.

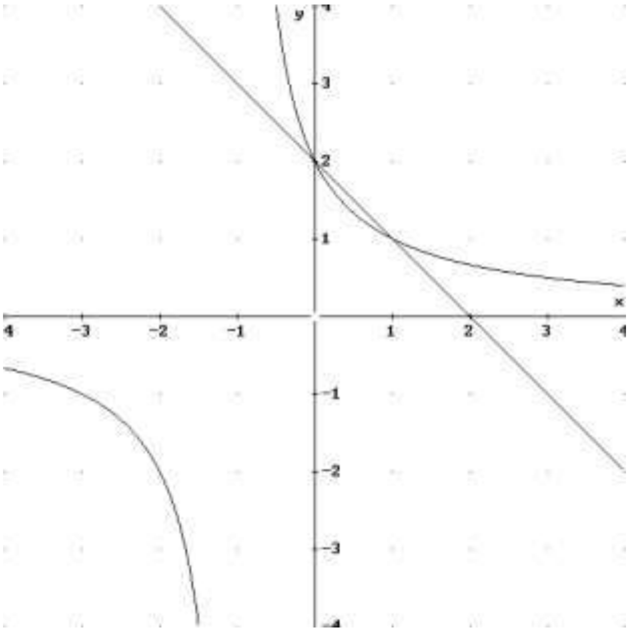
a) Calcula los puntos de corte entre las gráficas de *f* y *g*.
b) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes.
c) Halla el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Igualamos las dos funciones para calcular los puntos de corte

$$2-x=\frac{2}{x+1}\Rightarrow -x^2+x=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=1$$

b) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



c) Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_0^1\left[(2-x)-\left(\frac{2}{x+1}\right)\right]dx=\left[2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|\right]_0^1=\left(2-\frac{1}{2}-2\ln 2\right)-(0)=\frac{3}{2}-2\ln 2\,u^2$$

Calcula $\int_{2}^{4} \frac{e^{x}}{1+\sqrt{e^{x}}}\, dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t=\sqrt{e^{x}}$.

MATEMÁTICAS II. 2013. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{e^{x}} = t \Rightarrow e^{x} = t^{2}$$
$$e^{x} dx = 2t \ dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $x=2 \Rightarrow t=e$; $x=4 \Rightarrow t=e^{2}$

Con lo cual:

$$I=\int_{2}^{4} \frac{e^{x}}{1+\sqrt{e^{x}}}\, dx=\int_{e}^{e^{2}} \frac{2t}{1+t}\, dt=\int_{e}^{e^{2}} \left(2-\frac{2}{1+t}\right) dt=\left[2t-2\ln|1+t|\right]_{e}^{e^{2}}=$$
$$=2e^{2}-2e+2\ln\frac{1+e}{1+e^{2}}=7'71$$

a) Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f'(x)=(2x+1)e^{-x}$ y su gráfica pasa por el origen de coordenadas.
b) Calcula la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=0$.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos $f(x)=\int (2x+1)\cdot e^{-x}\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=2x+1;\ du=2\,dx \\ dv=e^{-x}\,dx;\ v=-e^{-x} \end{array}}$$

$$f(x)=\int (2x+1)\cdot e^{-x}\,dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}+2\int e^{-x}\,dx=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+C$$

Como su gráfica pasa por el origen de coordenadas, se cumple que:

$$f(0)=0\Rightarrow -(2\cdot 0+1)\cdot e^{-0}-2\cdot e^{-0}+C=0\Rightarrow C=3$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=-(2x+1)\cdot e^{-x}-2\cdot e^{-x}+3$

b) Calculamos la ecuación de la recta tangente en $x=0$.

- $x=0\Rightarrow f(0)=0$

- $f'(0)=(2\cdot 0+1)e^{-0}=1$

Luego, la ecuación de la recta tangente es: $y-0=1(x-0)\Rightarrow y=x$.

Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $g(x)=-x^2+6x-5$.
a) Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica de *g* en el punto de abscisa $x=4$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *g*, la recta $x-2y+2=0$. Calcula el área de este recinto.
MATEMÁTICAS II. 2013. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

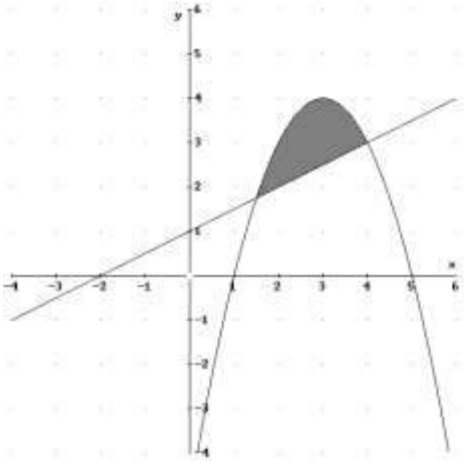
a) La ecuación de la recta normal en el punto de abscisa $x=4$ es: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g'(4)}\cdot(x-4)$

Calculamos: $g(4)=-4^2+6\cdot 4-5=3$

$$g'(x)=-2x+6\Rightarrow g'(4)=-2$$

Sustituyendo, tenemos: $y-g(4)=-\dfrac{1}{g'(4)}\cdot(x-4)\Rightarrow y-3=\dfrac{1}{2}(x-4)\Rightarrow x-2y+2=0$

b) Esbozamos el recinto que nos dicen



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$-x^2+6x-5=\frac{x+2}{2}\Rightarrow -2x^2+11x-12=0\Rightarrow x=\frac{-11\pm\sqrt{121-96}}{-4}=\frac{-11\pm 5}{-4}\Rightarrow \begin{array}{l} x=4 \\ x=\dfrac{3}{2}\end{array}$$

Calculamos el área del recinto

$$A=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left((-x^2+6x-5)-\frac{x+2}{2}\right)dx=\int_{\frac{3}{2}}^{4}\left(-x^2+\frac{11x}{2}-6\right)dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{11x^2}{4}-6x\right]_{\frac{3}{2}}^{4}=$$

$$=\left(-\frac{64}{3}+44-24\right)-\left(-\frac{9}{8}+\frac{99}{16}-9\right)=\frac{125}{48}\ u^2$$

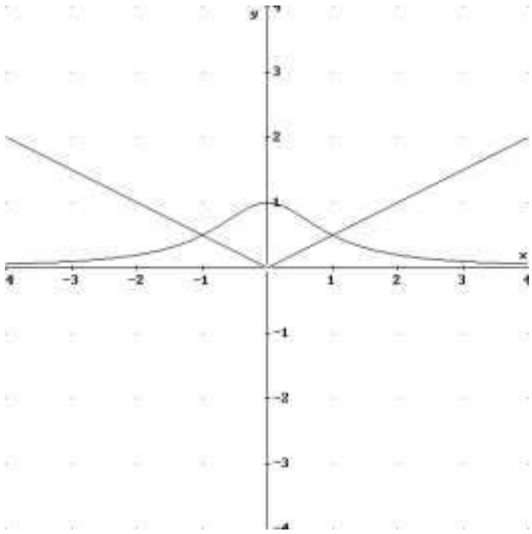
Sean $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas respectivamente por

$$f(x)=\frac{|x|}{2} \quad \text{y} \quad g(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

a) Esboza las gráficas de *f* y *g* sobre los mismos ejes y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.
b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de *f* y *g*.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las dos funciones:



Abrimos la función $f(x)$: $f(x)=\frac{|x|}{2}=\begin{cases}\frac{x}{2} & si \;\; x>0\\ -\frac{x}{2} & si \;\; x\le 0\end{cases}$

Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow x+x^3=2\Rightarrow x=1$$

$$-\frac{x}{2}=\frac{1}{1+x^2}\Rightarrow -x-x^3=2\Rightarrow x=-1$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $\left(1,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(-1,\frac{1}{2}\right)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A=2\cdot\int_0^1\left[\left(\frac{1}{1+x^2}\right)-\frac{x}{2}\right]dx=2\left[arc\,tg\,x-\frac{x^2}{4}\right]_0^1=2\left(arc\,tg\,1-\frac{1}{4}\right)-2\left(arc\,tg\,0-\frac{0}{4}\right)=2\frac{\pi}{4}-2\frac{1}{4}=\frac{\pi-1}{2}u^2$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=x\ln(x+1)$ para $x>-1$ (ln denota el logaritmo neperiano). Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot ln(x+1)\ dx$, que es una integral por partes.

$$u=\ln(x+1);\ du=\frac{1}{x+1}\ dx$$
$$dv=x\,dx;\ v=\frac{x^2}{2}$$

$$I=\int x\cdot ln(x+1)\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln(x+1)-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{(x+1)}dx=\frac{x^2}{2}\cdot ln(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)+C$$

Calculamos la constante:

$$0=\frac{1^2}{2}\cdot ln(1+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1^2}{2}-1+\ln(1+1)\right)+C\Rightarrow C=-\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$\frac{x^2}{2}\cdot ln(x+1)-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2}-x+\ln(x+1)\right)-\frac{1}{4}$$

Determina una función derivable $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f(1)=-1$ y que

$$f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\geq 0 \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como es derivable también es continua.

Calculamos $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+C & si \quad x<0 \\ e^x-x+D & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Como $f(1)=-1\Rightarrow e^1-1+D=-1\Rightarrow D=-e$

Como es continua en $x=0$, tenemos:

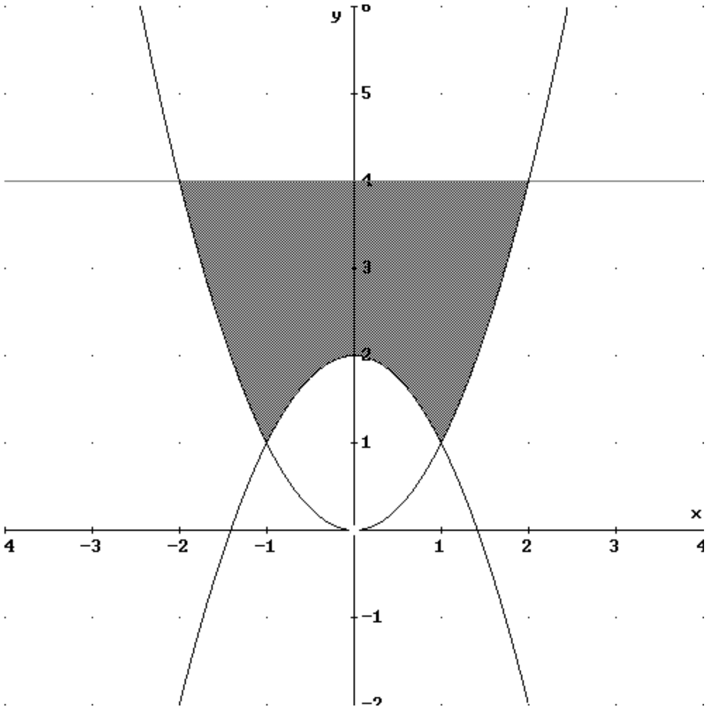
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x^3}{3}+x^2+C=C \\ \lim\limits_{x\to 0^+} e^x-x-e=1-e \end{array}\right\} \Rightarrow C=1-e$$

Luego, la función es: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3}{3}-x^2+1-e & si \quad x<0 \\ e^x-x-e & si \quad x\geq 0 \end{cases}$

Considera el recinto limitado por las siguientes curvas: $y=x^2$, $y=2-x^2$, $y=4$
a) Haz un esbozo del recinto y calcula los puntos de corte de las curvas.
b) Calcula el área del recinto.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$x^2 = 2 - x^2 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = \pm 1$$
$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(1,1)$, $(-1,1)$, $(2,4)$ y $(-2,4)$.

b) Como el recinto es simétrico respecto al eje de ordenadas, el área que nos piden es:

$$A = 2\cdot\left[\int_0^1 (4-2+x^2)dx + \int_1^2 (4-x^2)dx\right] = 2\left[2x+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 2\left[4x-\frac{x^3}{3}\right]_1^2 =$$
$$= 2\left(2+\frac{1}{3}\right) + 2\left[\left(8-\frac{8}{3}\right)-\left(4-\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{14}{3}+\frac{32}{3}-\frac{22}{3} = \frac{24}{3} = 8\ u^2$$

Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $I=\int \ln(4-x)\, dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(4-x);\; du=-\dfrac{1}{4-x}dx \\ dv=dx;\; v=x \end{array}}$$

$$I=\int \ln(4-x)\, dx = x\ln|4-x| - \int \frac{-x}{4-x}dx = x\ln|4-x| + \int \frac{x}{4-x}dx$$

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int \frac{4}{4-x}dx = \int\left(-1+\frac{4}{4-x}\right)dx = -x-4\ln|4-x|$$

Con lo cual: $I=\int \ln(4-x)\, dx = x\ln|4-x| - x - 4\ln|4-x|$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_{-1}^{1} \ln(4-x)\, dx = \left[x\ln|4-x| - x - 4\ln|4-x|\right]_{-1}^{1} = (\ln 3 - 1 - 4\ln 3) - (-\ln 5 + 1 - 4\ln 5) = -2 - 3\ln 3 + 5\ln 5$$

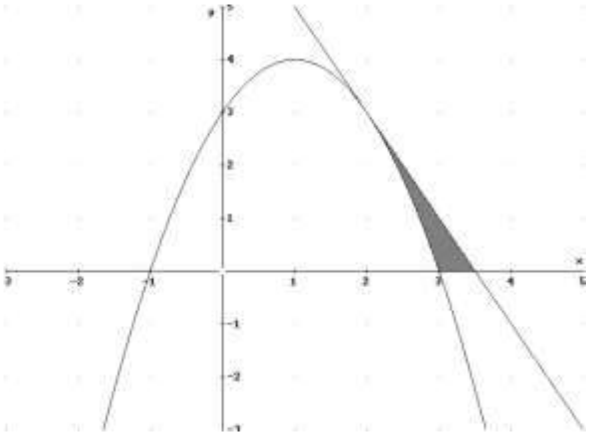
Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=-x^2+2x+3$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $2x+y-7=0$ y el eje OX, calculando los puntos de corte.
c) Halla el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en el punto $x=2$, es: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$
Sustituyendo los valores de $f(2)=-4+4+3=3$ y $f'(2)=-4+2=-2$, tenemos:

$$y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-3=-2\cdot(x-2)\Rightarrow 2x+y-7=0$$

b) Hacemos el dibujo de las funciones:



Calculamos los puntos de corte de las funciones:

$$-x^2+2x+3=0\Rightarrow x=3\ ;\ x=-1$$

$$-2x+7=0\Rightarrow x=\frac{7}{2}$$

$$-x^2+2x+3=-2x+7\Rightarrow x^2-4x+4=0\Rightarrow x=2$$

Luego, las funciones se cortan en los puntos: $(3,0)$, $\left(\frac{7}{2},0\right)$ y $(2,3)$.

b)

$$A=\int_2^3\left[(-2x+7)-(-x^2+2x+3)\right]dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx=\int_2^3(x^2-4x+4)dx+\int_3^{\frac{7}{2}}(-2x+7)dx=$$

$$=\left[\frac{x^3}{3}-2x^2+4x\right]_2^3+\left[-x^2+7x\right]_3^{\frac{7}{2}}=(9-18+12)-\left(\frac{8}{3}-8+8\right)+\left(-\frac{49}{4}+\frac{49}{2}\right)-(-9+21)=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}\ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^3-3x^2-x+3$.
a) Halla, si existe, el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=3-x$.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta del apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es tangente, en ese punto la función y la tangente coinciden, luego:

$$x^3-3x^2-x+3=3-x\Rightarrow x^3-3x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=3$$

La ecuación de la recta tangente en $x=0$ es: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)$.

$f(0)=3$

$f'(x)=3x^2-6x-1\Rightarrow f'(0)=-1$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(0)=f'(0)\cdot(x-0)\Rightarrow y-3=-1\cdot(x-0)\Rightarrow y=-x+3$

La ecuación de la recta tangente en $x=3$ es: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)$.

$f(3)=0$

$f'(x)=3x^2-6x-1\Rightarrow f'(3)=27-18-1=8$

Sustituyendo, tenemos: $y-f(3)=f'(3)\cdot(x-3)\Rightarrow y-0=8\cdot(x-3)\Rightarrow y=8x-24$

Luego, el punto es: $(0,3)$

b) Ya hemos visto que los puntos de corte de las dos funciones son: $x=0$ y $x=3$. Tenemos que ver cuál de las dos funciones va por encima y cuál va por debajo. Para ello sustituimos un valor comprendido entre 0 y 3, y vemos cuál tiene mayor valor.

Para $x=1\Rightarrow y=(1)^3-3(1)^2-1+3=0$
Para $x=1\Rightarrow y=-1+3=2$

Por lo tanto, la función que va por encima es $y=-x+3$. Luego el área vendrá dada por:

$$A=\int_0^3\left[(-x+3)-(x^3-3x^2-x+3)\right]dx=\int_0^3 (-x^3+3x^2)\,dx=\left[-\frac{x^4}{4}+x^3\right]_0^3=\frac{27}{4}\ u^2$$

Sea $f:(-1,3)\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=\dfrac{x+9}{(x+1)(x-3)}$. Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-3}=\frac{A(x-3)+B(x+1)}{(x+1)(x-3)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$x=-1\Rightarrow 8=-4A\Rightarrow A=-2$
$x=3\Rightarrow 12=4B\Rightarrow B=3$

Con lo cual:

$$\int\frac{x+9}{(x+1)(x-3)}\,dx=\int\frac{-2}{x+1}\,dx+\int\frac{3}{x-3}\,dx=-2\ln|x+1|+3\ln|x-3|+C$$

Como tiene que pasar por el punto $(1,0)$

$$0=-2\ln|1+1|+3\ln|1-3|+C\Rightarrow C=2\ln 2-3\ln 2=-\ln 2$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $-2\ln|x+1|+3\ln|x-3|-\ln 2$

Calcula $\int \frac{dx}{2x(x+\sqrt{x})}$ **(Sugerencia: cambio de variable $t=\sqrt{x}$)**

MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x}=t \Rightarrow x=t^2$$
$$dx=2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I=\int \frac{1}{2x(x+\sqrt{x})}dx=\int \frac{2t}{2t^2(t^2+t)}dt=\int \frac{dt}{t^2(t+1)}$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{t^2(t+1)}=\frac{A}{t}+\frac{B}{t^2}+\frac{C}{t+1}=\frac{A\cdot t(t+1)+B\cdot(t+1)+C\cdot t^2}{t^2(t+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $t=1$

$t=0 \Rightarrow 1=B$

$t=-1 \Rightarrow 1=C$

$t=1 \Rightarrow 1=2A+2B+C \Rightarrow A=-1$

Con lo cual:

$$\int \frac{dt}{t^2(t+1)}=\int \frac{-1}{t}\ dt+\int \frac{1}{t^2}\ dt+\int \frac{1}{t+1}\ dt=-\ln t-\frac{1}{t}+\ln(t+1)+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$I=-\ln t-\frac{1}{t}+\ln(t+1)+C=-\ln\left|\sqrt{x}\right|-\frac{1}{\sqrt{x}}+\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$$

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = e^{x} \cdot \cos x$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$.
b) Calcula la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,0)$
MATEMÁTICAS II. 2014. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 0$ es $y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0)$

$$f(0) = 1$$
$$f'(x) = e^{x} \cdot \cos x - e^{x} \cdot sen\, x \Rightarrow f'(0) = 1$$

Luego la recta tangente en $x = 0$ es $y - 1 = 1 \cdot (x - 0) \Rightarrow y = x + 1$

b) Es una integral por partes cíclica

$$\int e^{x} \cdot \cos x\, dx = e^{x} sen\, x - \int e^{x} \cdot senx\, dx =$$
$$= e^{x} sen\, x - \left[-e^{x} \cos x + \int e^{x} \cos x dx \right] = e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x - \int e^{x} \cos x dx$$

$$2\int e^{x} \cdot \cos x\, dx = e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x \Rightarrow \int e^{x} \cdot \cos x\, dx = \frac{e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x}{2} + C$$

$u = e^{x}$; $du = e^{x}\ dx$
$dv = \cos x\, dx$; $v = senx$

$u = e^{x}$; $du = e^{x}\ dx$
$dv = sen\, x\, dx$; $v = -\cos x$

Como pasa por el origen de coordenadas:

$$0 = \frac{1}{2} + C \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

Luego, la función primitiva que nos piden es: $F(x) = \dfrac{e^{x} sen\, x + e^{x} \cos x}{2} - \dfrac{1}{2}$

Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx$ **.**

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{x^2-x-2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 1dx+\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x+2}{x^2-x-2}\,dx=\frac{1}{2}\left[x\right]_0^1+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I_1$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2-x-2=0 \Rightarrow x=2\ ;\ x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x+2}{x^2-x-2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+1}=\frac{A(x+1)+B(x-2)}{(x-2)(x+1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$x=2 \Rightarrow 4=3A \Rightarrow A=\frac{4}{3}$$
$$x=-1 \Rightarrow 1=-3B \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$$

Con lo cual:

$$I_1=\int_0^1 \frac{\frac{4}{3}}{x-2}\,dx+\int_0^1 \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx=\left[\frac{4}{3}\ln|\,x-2\,|\right]_0^1+\left[-\frac{1}{3}\ln|\,x+1\,|\right]_0^1=-\frac{4}{3}\ln 2-\frac{1}{3}\ln 2=-\frac{5}{3}\ln 2$$

Por lo tanto, la integral que nos pedían vale:

$$\int_0^1 \frac{x^2}{2x^2-2x-4}\,dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}I_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{5}{3}\ln 2\right)=\frac{1}{2}-\frac{5}{6}\ln 2$$

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$. (Sugerencia: integración por partes).

MATEMÁTICAS II. 2014. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = x;\ \ du = dx \\ dv = \dfrac{dx}{\cos^2 x};\ v = tg\ \ x \end{array}}$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = x\, tg\ x - \int tg\ x\, dx = x\, tg\ x - \int \frac{sen\, x}{\cos x} dx = x\, tg\ x + \ln|\cos x|$$

Calculamos la integral definida que nos piden:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx = \left[x\, tg\ x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} tg\ x\, dx = \frac{\pi}{4} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sen\, x}{\cos x} dx = \frac{\pi}{4} + \left[\ln \cos x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} + \ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Calcula $\displaystyle\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A

R E S O L U C I Ó N

Dividimos los dos polinomios, con lo cual la integral se descompone en:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = \int -1\,dx + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1\,;\ x=-2$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x-2}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{(x-1)\cdot(x+2)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$$x=1 \Rightarrow -1=3A \Rightarrow A=-\frac{1}{3}$$

$$x=-2 \Rightarrow -4=-3B \Rightarrow B=\frac{4}{3}$$

Con lo cual:

$$\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{x-2}{x^2+x-2}\,dx = -x + \int \frac{-\frac{1}{3}}{(x-1)}\,dx + \int \frac{\frac{4}{3}}{(x+2)}\,dx =$$

$$= -x - \frac{1}{3}\ln|x-1| + \frac{4}{3}\ln|x+2| + C$$

Determina la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$. (ln denota la función logaritmo neperiano).
MATEMÁTICAS II. 2015. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Integramos, por partes, para calcular $f'(x)$

$$f'(x)=\int \ln(x)\ dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$$

$$u=\ln(x);\ du=\frac{1}{x}\ dx$$
$$dv=dx;\ v=x$$

Volvemos a integrar, por partes, para calcular $f(x)$

$$f(x)=\int (x\ln x - x + C)\ dx = \int x\ln x\,dx - \int x\,dx + \int C\,dx = \int x\ln x\,dx - \frac{x^2}{2}+Cx=$$
$$=\frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx - \frac{x^2}{2}+Cx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+Cx+D=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+Cx+D$$

$$u=\ln(x);\ du=\frac{1}{x}\ dx$$
$$dv=xdx;\ v=\frac{x^2}{2}$$

Calculamos el valor de las constantes *C* y *D*.

Tangente horizontal $\Rightarrow f'(1)=0\Rightarrow 0=1\cdot\ln 1-1+C\Rightarrow C=1$

Pasa por el punto $(1,2)\Rightarrow f(1)=2\Rightarrow 2=\frac{1\cdot\ln 1}{2}-\frac{3}{4}+1+D\Rightarrow D=\frac{7}{4}$

Luego, la primitiva que nos piden es: $f(x)=\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{3x^2}{4}+x+\frac{7}{4}$

Calcula $\int \frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$ **(Sugerencia** $\sqrt{x+2}=t$ **)**

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{x+2}$, vamos a calcular cuánto vale *dx* y *x*:

$$dt=\frac{1}{2\cdot\sqrt{x+2}}dx \Rightarrow dx=2\cdot\sqrt{x+2}\,dt=2t\,dt$$
$$t=\sqrt{x+2}\Rightarrow t^2=x+2\Rightarrow x=t^2-2$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-2-2)\cdot t}=\int\frac{2t\,dt}{(t^2-4)\cdot t}=\int\frac{2dt}{(t^2-4)}$$

Es una integral racional con raíces reales simples. Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{2}{t^2-4}=\frac{A}{t+2}+\frac{B}{t-2}=\frac{A(t-2)+B(t+2)}{t^2-4}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, y *B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores

$$t=2\Rightarrow 2=4B\Rightarrow B=\frac{1}{2}$$
$$t=-2\Rightarrow 2=-4A\Rightarrow A=-\frac{1}{2}$$

Con lo cual:

$$\int\frac{2dt}{(t^2-4)}=\int\frac{Adt}{t+2}+\int\frac{Bdt}{t-2}=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C$$

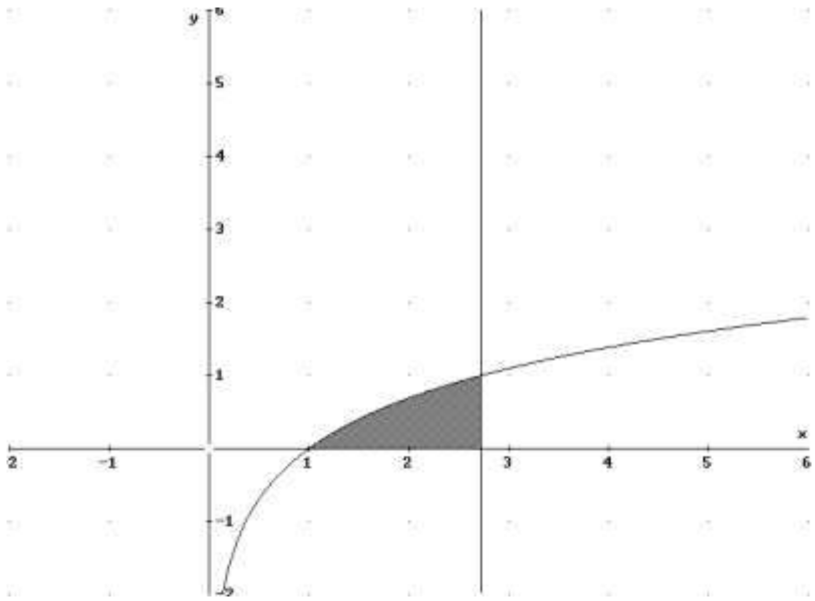
Deshacemos el cambio de variable:

$$\int\frac{2dt}{(t^2-4)}=-\frac{1}{2}\ln|t+2|+\frac{1}{2}\ln|t-2|+C=-\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|+\frac{1}{2}\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right|+C$$

Sea g la función definida por $g(x)=\ln(x)$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Calcula el valor de $a>1$ para el que el área del recinto limitado por la gráfica de g, el eje de abscisas y la recta $x=a$ es 1.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

El recinto es:



Calculamos el área.

$$A=\int_1^a \ln x\,dx$$

Hacemos la integral por partes:

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}} \quad \int \ln x\ dx = x\ln x-\int dx = x\ln x - x + C$$

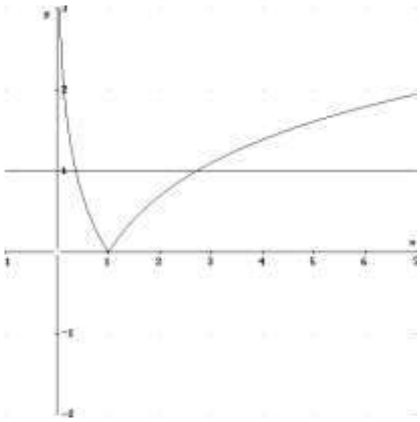
$$A=\int_1^a \ln x\,dx=\left[x\ln x-x\right]_1^a=(a\ln a-a)-(1\ln 1-1)=a\ln a-a+1=1\Rightarrow a\ln a-a=0\Rightarrow \ln a=1\Rightarrow e^1=a$$

Luego: $a=e$

Sea f la función definida por $f(x)=|\ln(x)|$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano).
a) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=1$.
b) Calcula los puntos de corte de la gráfica de f con la recta $y=1$.
c) Calcula el área del recinto citado.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos las dos funciones:



b) Calculamos los puntos de corte de las dos funciones

$$|\ln x|=1\Rightarrow\begin{cases}\ln x=1\Rightarrow x=e\\ -\ln x=1\Rightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}\end{cases}$$

Calculamos el área que nos piden

$$A=\int_{\frac{1}{e}}^{1}\left[1-(-\ln x)\right]\,dx+\int_{1}^{e}\left[1-(\ln x)\right]\,dx=\left[x+x\ln x-x\right]_{\frac{1}{e}}^{1}+\left[x-x\ln x+x\right]_{1}^{e}=\frac{1}{e}+e-2\ u^2$$

Recuerda que la integral de ln$x$ es por partes:

$$\int\ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$u=\ln x;\ du=\dfrac{1}{x}\,dx$
$dv=dx;\ v=x$

Calcula $\int e^{2x}\, sen(x)\, dx$

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos la integral por partes.

$$\int e^{2x}\cdot sen\, x\, dx = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\int e^{2x}\cdot \cos x\, dx = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\left[e^{2x}\cdot sen\, x - 2\int e^{2x}\cdot sen\, x\, dx\right]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}\, dx \\ dv = sen\, x\, dx;\ v = -\cos x \end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{l} u = e^{2x};\ du = 2e^{2x}\, dx \\ dv = \cos x\, dx;\ v = sen\, x \end{array}}$$

$$I = -e^{2x}\cdot\cos x + 2\left[e^{2x}\cdot sen\, x - 2\cdot I\right]$$

$$I + 4I = -e^{2x}\cdot\cos x + 2e^{2x}\cdot sen\, x$$

$$I = \frac{-e^{2x}\cdot\cos x + 2e^{2x}\cdot sen\, x}{5} + C$$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{2x}$ para $x>0$ (ln denota la función logaritmo neperiano) y sea *F* la primitiva de *f* tal que $F(1)=2$.
a) Calcula $F'(e)$.
b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto de abscisa $x=e$.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x)=\int f(x)\ dx$, y además: $F'(x)=f(x)$.
Por lo tanto:

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln\ e}{2e}=\frac{1}{2e}$$

b) Calculamos $F(x)$. Para ello hacemos el cambio de variable $\ln x=t$, con lo cual $\ln x=t\Rightarrow \frac{1}{x}dx=dt$

$$F(x)=\int\frac{\ln x}{2x}\ dx=\int\frac{t}{2}\ dt=\frac{t^2}{4}+C=\frac{(\ln x)^2}{4}+C$$

Como $F(1)=2\Rightarrow \frac{(\ln 1)^2}{4}+C=2\Rightarrow C=2$

Por lo tanto: $F(x)=\frac{(\ln x)^2}{4}+2$

Calculamos la recta tangente que nos piden: $y-F(e)=F'(e)\cdot(x-e)$

$$F(e)=\frac{(\ln e)^2}{4}+2=\frac{1}{4}+2=\frac{9}{4}$$

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln\ e}{2e}=\frac{1}{2e}$$

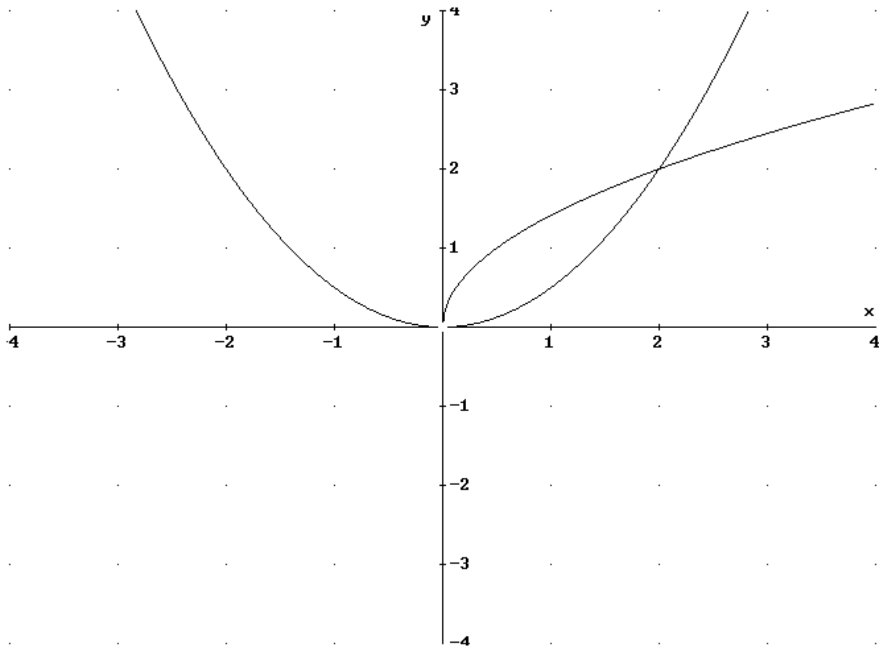
Luego, la recta tangente es: $y-\frac{9}{4}=\frac{1}{2e}\cdot(x-e)$

Sean $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=\sqrt{2x}$ y $g(x)=\frac{1}{2}x^2$.

a) Halla los puntos de corte de las gráficas de *f* y *g*. Haz un esbozo del recinto que limitan.
b) Calcula el área de dicho recinto.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones podemos representarlas haciendo una tabla de valores.



En el dibujo vemos que los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(2,2)$.

b) Luego, el área que nos piden es:

$$A=\int_0^2\left[\sqrt{2x}-\frac{1}{2}x^2\right]dx=\left[\frac{2\sqrt{2}\,x^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^3}{6}\right]_0^2=\frac{4}{3}\,u^2$$

Calcula el valor de $a>1$ sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y=-x^2+ax$ y la recta $y=x$ es $\frac{4}{3}$.

MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte entre las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=-x^2+ax \\ y=x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2+(1-a)x=0 \Rightarrow x=0 \ ; \ x=a-1$$

Calculamos el área:

$$A=\int_0^{a-1}(-x^2+ax-x)\ dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}-\frac{x^2}{2}\right]_0^{a-1}=-\frac{(a-1)^3}{3}+\frac{a(a-1)^2}{2}-\frac{(a-1)^2}{2}=\frac{4}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow a^3-3a^2+3a-9=0$$

Resolviendo la ecuación por Ruffini, sale que $a=3$

Sea *f* la función definida por $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2(x-1)}$ para $x\neq 0$ y $x\neq 1$ y sea *F* la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $P(2,\ln 2)$ (ln denota logaritmo neperiano).
a) Calcula la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto *P*.
b) Determina la función *F*.
MATEMÁTICAS II. 2015. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces: $F(x)=\int f(x)\,dx$, y además: $F'(x)=f(x)$.
Calculamos la recta tangente que nos piden: $y-F(2)=F'(2)\cdot(x-2)$

$$F(2)=\ln 2$$
$$F'(2)=f(2)=\frac{4+1}{4}=\frac{5}{4}$$

Luego, la recta tangente es: $y-\ln 2=\frac{5}{4}\cdot(x-2)$

b) Calculamos $\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx$

Las raíces del denominador son: $x=0$; $x=0$; $x=1$
Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}=\frac{A\cdot x\cdot(x-1)+B(x-1)+C\cdot x^2}{x^2\cdot(x-1)}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A*, *B* y *C* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores más otro valor que puede ser $x=2$

$$x=0\Rightarrow 1=-B\Rightarrow B=-1$$
$$x=1\Rightarrow 2=C\Rightarrow C=2$$
$$x=2\Rightarrow 5=2A+B+4C\Rightarrow A=-1$$

Con lo cual:

$$F(x)=\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx=\int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x^2}\,dx+\int\frac{2}{x-1}\,dx=-\ln x+\frac{1}{x}+2\ln(x-1)+C$$

Como $F(x)$ pasa por el punto $(2,\ln 2)$ entonces: $\ln 2=-\ln 2+\frac{1}{2}+2\ln 1+C\Rightarrow C=2\ln 2-\frac{1}{2}$

Por lo tanto: $F(x)=-\ln x+\frac{1}{x}+2\ln(x-1)+2\ln 2-\frac{1}{2}$

Calcula $\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\, dx$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $F(x)=\int x^2 sen(x)\,dx$, que es una integral por partes.

$$F(x)=\int x^2 sen(x)\,dx=-x^2\cdot\cos x+2\int x\cdot\cos x\,dx=-x^2\cdot\cos x+2\cdot\left[x\cdot sen\,x-\int sen\,x\,dx\right]=$$
$$=-x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\,x+2\cos x+C$$

$u=x^2;\ du=2x\ dx$
$dv=sen\,x\,dx;\ v=-\cos x$

$u=x;\ du=dx$
$dv=\cos x\,dx;\ v=sen\,x$

Por lo tanto, la integral que nos piden valdrá:

$$\int_0^{\pi} x^2 sen(x)\,dx=\left[-x^2\cdot\cos x+2x\cdot sen\,x+2\cos x\right]_0^{\pi}=$$
$$=\left(-\pi^2\cdot\cos\pi+2\pi\cdot sen\,\pi+2\cos\pi\right)-\left(-0^2\cdot\cos 0+2\cdot 0\cdot sen\,0+2\cos 0\right)=$$
$$=\pi^2-2-2=\pi^2-4$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por: $f(x)=\left| x^2-4 \right|$

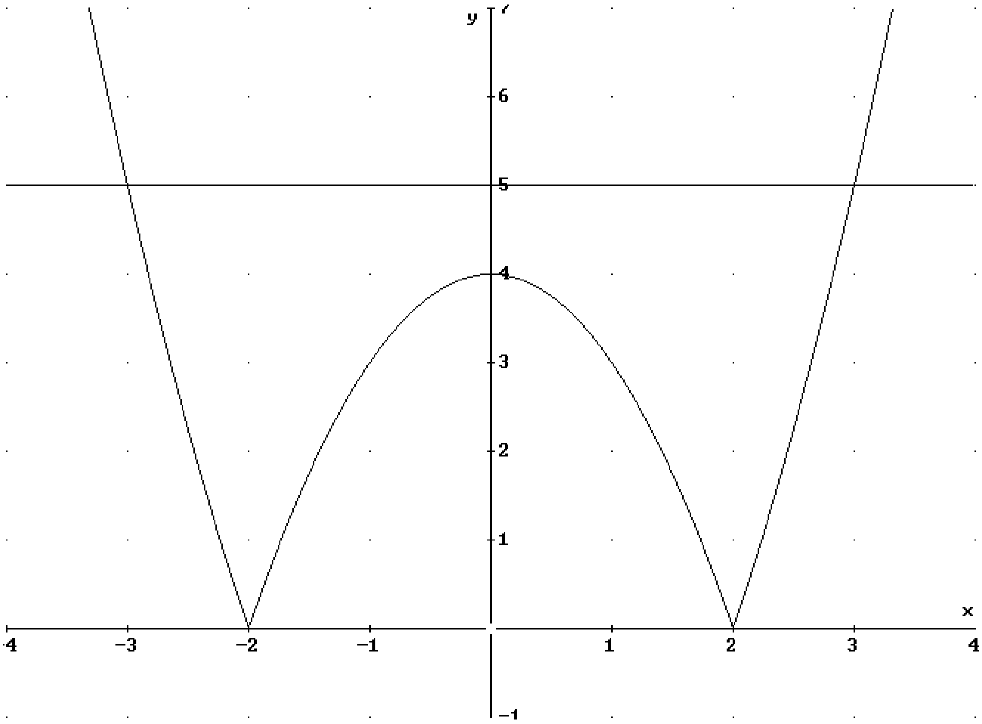
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f*.

b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y=5$.

MATEMÁTICAS II. 2015. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función: $f(x)=\begin{cases} x^2-4 & si \quad x<-2 \\ -x^2+4 & si \quad -2\le x\le 2 \\ x^2-4 & si \quad x>2 \end{cases}$, y hacemos el dibujo



b) Vemos por el dibujo que es simétrica respecto el eje OY, luego:

$$A=2\left[\int_0^2 (5+x^2-4)\,dx+\int_2^3 (5-x^2+4)\,dx\right]=2\left[\int_0^2 (1+x^2)\,dx+\int_2^3 (9-x^2)\,dx\right]=$$

$$=2\left(\left[x+\frac{x^3}{3}\right]_0^2+\left[9x-\frac{x^3}{3}\right]_2^3\right)=2\left(\left[2+\frac{8}{3}\right]+\left[27-\frac{27}{3}\right]-\left[18-\frac{8}{3}\right]\right)=\frac{44}{3}\,u^2$$

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función *f* en el punto de abscisa $x = 1$ sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \dfrac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x > -1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2.OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral: $f(x) = \int \frac{(x-1)^2}{x+1}\,dx = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx$

Como es una función racional, dividimos los dos polinomios y descomponemos la integral

$$f(x) = \int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx = \int (x-3)dx + \int \frac{4}{x+1}\,dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x+1| + C$$

Como $f(0) = 0 \Rightarrow 0 = 0+0+0+C \Rightarrow C = 0$

Luego, la función es: $f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4\ln|x+1|$

La recta tangente en $x=1$ es $y - f(1) = f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 4\ln 2 = -\frac{5}{2} + 4\ln 2$$

$$f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1} \Rightarrow f'(1) = 0$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y + \frac{5}{2} - 4\ln 2 = 0\cdot(x-1) \Rightarrow y = -\frac{5}{2} + 4\ln 2$

Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\ln\ x$ (ln representa logaritmo neperiano).
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=1$.
b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de *f*, $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.
MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 2.OPCIÓN B.

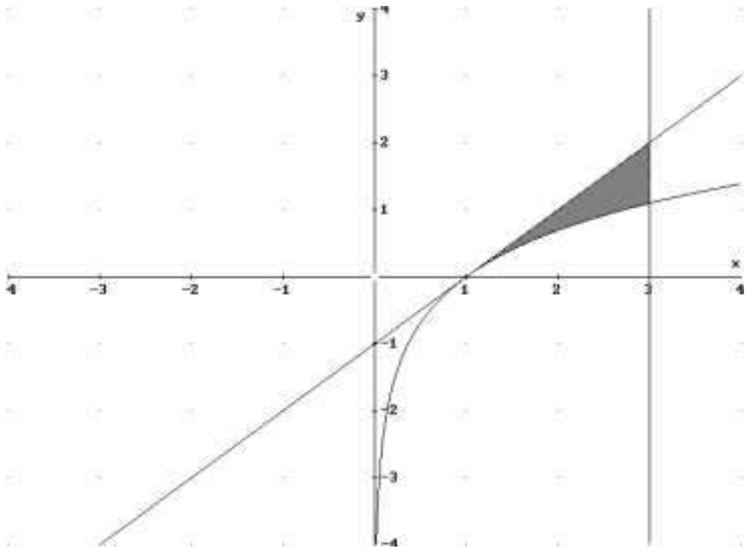
R E S O L U C I Ó N

a) La recta tangente en $x=1$ es $y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$

$$f(1)=Ln1=0$$
$$f'(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f'(1)=\frac{1}{1}=1$$

Sustituyendo en la ecuación, tenemos, $y-0=1\cdot(x-1)\Rightarrow y=x-1$

b) El área de la región pedida es:



$$A=\int_{1}^{3}(x-1-\ln x)\,dx=\left[\frac{x^{2}}{2}-x-x\ln x+x\right]_{1}^{3}=\left[\frac{x^{2}}{2}-x\ln x\right]_{1}^{3}=\left(\frac{9}{2}-3\ln 3\right)-\left(\frac{1}{2}-\ln 1\right)=4-3\ln 3\ u^{2}$$

La integral de $\ln\ x$ la hacemos por partes

$$\int \ln x\ dx=x\ln x-\int dx=x\ln x-x+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln x;\ du=\frac{1}{x}\ dx \\ dv=dx;\ v=x \end{array}}$$

Considera la función *f* dada por $f(x)=\sqrt{x}+\dfrac{\ln x}{x}$ para $x>0$.

a) Halla todas las primitivas de *f*.

b) Halla $\int_1^3 f(x)\,dx$

c) Determina la primitiva de *f* que toma el valor 3 para $x=1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos la integral de $\sqrt{x}$ y la integral de $\dfrac{\ln x}{x}$ por separado.

$$I_1=\int\sqrt{x}\,dx=\int x^{\frac{1}{2}}\,dx=\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}=\frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}$$

$$I_2=\int\frac{\ln x}{x}\,dx$$

Hacemos un cambio de variable: $t=\ln x$; $dt=\dfrac{1}{x}dx$

$$I_2=\int\frac{\ln x}{x}\,dx=\int t\cdot dt=\frac{t^2}{2}=\frac{(\ln x)^2}{2}$$

Con lo cual, todas las primitivas de *f* son: $F(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}+\dfrac{(\ln x)^2}{2}+C$

b)

$$\int_1^3 f(x)\,dx=\left[\frac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^3=\left(\frac{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}}{3}+\frac{(\ln 3)^2}{2}\right)-\left(\frac{2}{3}+\frac{(\ln 1)^2}{2}\right)=2\cdot\sqrt{3}+\frac{(\ln 3)^2}{2}-\frac{2}{3}$$

c) Calculamos la primitiva que cumple: $F(1)=3$

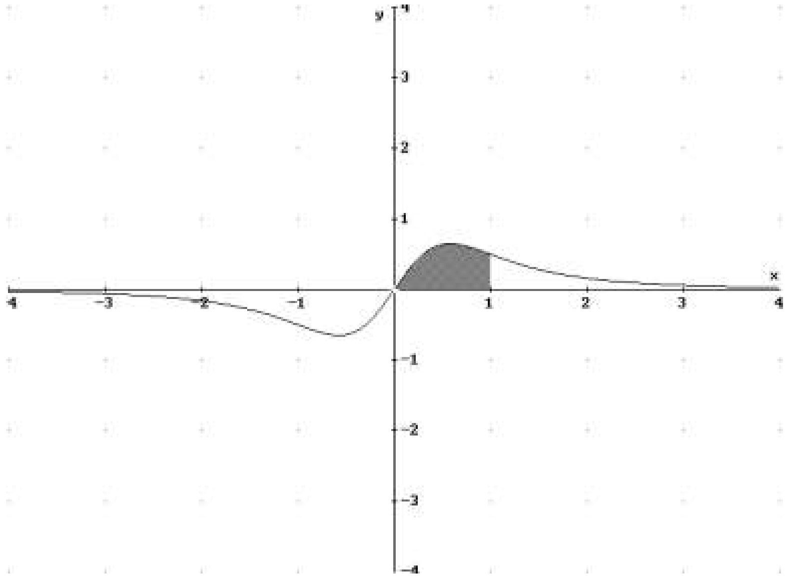
$$F(1)=3\Rightarrow\frac{2\cdot\sqrt{1^3}}{3}+\frac{(\ln 1)^2}{2}+C=3\Rightarrow\frac{2}{3}+C=3\Rightarrow C=\frac{7}{3}$$

Con lo cual, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{2\cdot\sqrt{x^3}}{3}+\dfrac{(\ln x)^2}{2}+\dfrac{7}{3}$

Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$. Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f*, el eje de abscisas y las recta $x=0$ y $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo del recinto cuya área nos piden calcular



El área que nos piden viene dada por: $A=\int_0^1 \dfrac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx$

Hacemos un cambio de variable: $t=x^2+1\ ;\ dt=2x\,dx$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$Si\ \ x=0\ \Rightarrow\ t=x^2+1=1$$
$$Si\ \ x=1\ \Rightarrow\ t=x^2+1=2$$

Con lo cual:

$$A=\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^2}\,dx=\int_1^2 \frac{1}{t^2}\,dt=\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2=-\frac{1}{2}+1=\frac{1}{2}\ u^2$$

De la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=ae^{x}-bx$, donde $a,b\in\mathbb{R}$ se sabe que su gráfica tiene tangente horizontal en $x=0$ y que $\int_0^1 f(x)\,dx=e-\frac{3}{2}$. Halla los valores de *a* y *b*.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la primera derivada de la función.

$$f'(x)=ae^{x}-b$$

Vamos aplicando las condiciones del problema.

- Tangente horizontal en $x=0\Rightarrow f'(0)=0\Rightarrow a-b=0$

- $\int_0^1 f(x)\,dx=e-\frac{3}{2}\Rightarrow\int_0^1 (ae^{x}-bx)\,dx=\left[ae^{x}-\frac{bx^{2}}{2}\right]_0^1=ae-\frac{b}{2}-a=e-\frac{3}{2}$

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos que: $a=1$; $b=1$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{3x(2m-x)}{m^3}$, con $m>0$. Calcula el área del recinto encerrado por la gráfica de *f* y el eje OX.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos los puntos de corte de la función con el eje OX

$$\frac{3x(2m-x)}{m^3}=0\Rightarrow 6mx-3x^2=0\Rightarrow x=0\ ;\ x=2m$$

Vemos que función va por encima y cuál por debajo:

$$x=m\Rightarrow\begin{cases} f(x)=\dfrac{3m(2m-m)}{m^3}=\dfrac{3}{m}>0 \\ Eje\ OX\Rightarrow y=0\end{cases}$$

Luego, la función $f(x)=\dfrac{3x(2m-x)}{m^3}$ va por encima del eje OX

$$A=\frac{1}{m^3}\int_0^{2m}(6mx-3x^2)\ dx=\frac{1}{m^3}\left[\frac{6mx^2}{2}-\frac{3x^3}{3}\right]_0^{2m}=\frac{1}{m^3}\left(12m^3-8m^3\right)=4\ u^2$$

Calcula el valor de $a > 0$ para el que se verifica $\int_0^a \frac{x}{2+x^2}\,dx = 1$.

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral

$$\int_0^a \frac{x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^a \frac{2x}{2+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\ln(2+x^2)\right]_0^a = \frac{1}{2}\left[\ln(2+a^2)-\ln 2\right] = 1$$

Resolvemos la ecuación:

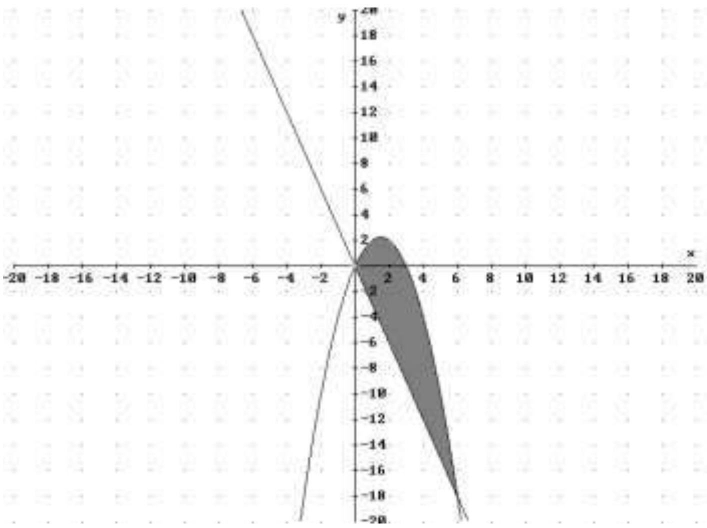
$$\frac{1}{2}\left[\ln(2+a^2)-\ln 2\right] = 1 \Rightarrow \ln\frac{2+a^2}{2} = 2 \Rightarrow e^2 = \frac{2+a^2}{2} \Rightarrow a = +\sqrt{2e^2-2} = 12'77$$

Ya que $a > 0$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=-x^2+mx$ siendo $m>0$. Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f* y la recta $y=-mx$ y calcula el valor de *m* para que el área de dicho recinto sea 36.
MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=-mx \\ y=-x^2+mx \end{array}\right\} \Rightarrow x^2-2mx=0 \Rightarrow x=0 \;;\; x=2m.$$

$$36=\int_0^{2m}(-x^2+mx-(-mx))\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2mx^2}{2}\right]_0^{2m}=\left[-\frac{(2m)^3}{3}+\frac{2m(2m)^2}{2}\right]=-\frac{8m^3}{3}+\frac{8m^3}{2}=$$

$$=\frac{8m^3}{6}\Rightarrow m^3=27\Rightarrow m=3$$

Calcula $\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,dx$ $\qquad$ **(*sugerencia* : $t=\sqrt{2x+1}$)**

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt{2x+1}$, vamos a calcular cuánto vale *dx* y *x*:

$$dt=\frac{2}{2\cdot\sqrt{2x+1}}\,dx \Rightarrow dx=\sqrt{2x+1}\,dt=t\,dt$$

$$t=\sqrt{2x+1} \Rightarrow t^2=2x+1 \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2}$$

Sustituimos en la integral el cambio de variable

$$\int \frac{\sqrt{2x+1}}{2x+1+\sqrt{2x+1}}\,dx=\int \frac{t^2\,dt}{2\left(\frac{t^2-1}{2}\right)+1+t}=\int \frac{t^2\,dt}{t^2+t}=\int \frac{tdt}{t+1}$$

Dividimos y descomponemos:

$$\int \frac{tdt}{t+1}=\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=t-\ln|t+1|=\sqrt{2x+1}-\ln\left|\sqrt{2x+1}+1\right|+C$$

Determina la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f''(x) = -2\,sen\,2x \quad , \quad f(0) = 1 \quad y \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos:

$$f'(x) = \int f''(x)\,dx = \int -2\,sen\,2x\,dx = -\int 2\,sen\,2x\,dx = -(-\cos 2x) = \cos\, 2x + C$$

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (\cos\, 2x + C)\,dx = \frac{1}{2} sen\; 2x + Cx + D$$

Calculamos los valores de las constantes con los datos del problema

$$f(0) = 1 \Rightarrow D = 1$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Rightarrow C \cdot \frac{\pi}{2} + 1 = 0 \Rightarrow C = -\frac{2}{\pi}$$

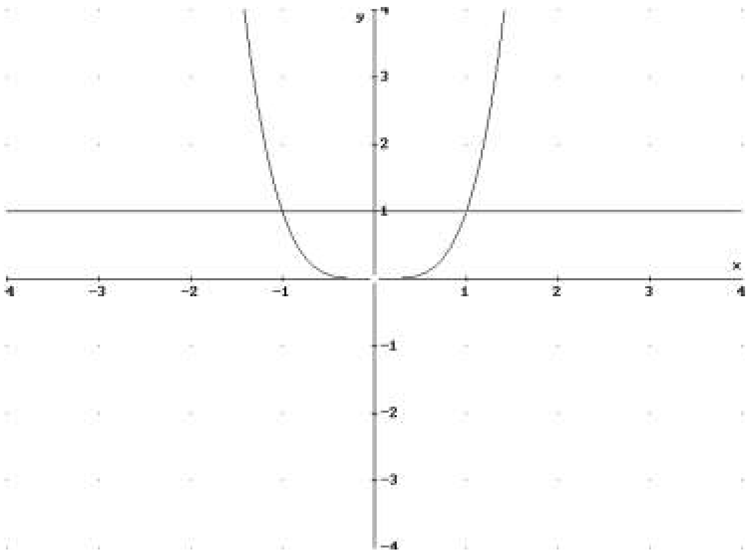
Luego, la función que nos piden es: $f(x) = \dfrac{1}{2} sen\; 2x - \dfrac{2}{\pi} x + 1$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^4$. Encuentra la recta horizontal que corta a la gráfica de *f* formando con ella un recinto con área $\frac{8}{5}$.

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Hacemos un esbozo de las dos funciones. La recta paralela al eje OX tiene de ecuación $y=a$



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} y=a \\ y=x^4 \end{array}\right\} \Rightarrow x^4=a \Rightarrow x=\pm\sqrt[4]{a}\,.$$

Como el recinto es simétrico respecto al eje OY, calculamos el área para $x>0$ y la multiplicamos por 2

$$\frac{8}{5}=2\cdot\int_0^{\sqrt[4]{a}}(a-x^4)\,dx=2\left[ax-\frac{x^5}{5}\right]_0^{\sqrt[4]{a}}=2\cdot\left[a\sqrt[4]{a}-\frac{(\sqrt[4]{a})^5}{5}-0\right]=2\cdot\left[a\sqrt[4]{a}-\frac{a\sqrt[4]{a}}{5}\right]=\frac{8a\sqrt[4]{a}}{5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{8}{5}=\frac{8a\sqrt[4]{a}}{5}\Rightarrow 1=a\sqrt[4]{a}=\sqrt[4]{a^5}\Rightarrow a^5=1\Rightarrow a=1$$

Calcula $\int \frac{x}{1+\sqrt{x}}\, dx$. Sugerencia: se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Hacemos el cambio de variable:

$$\sqrt{x} = t \Rightarrow x = t^2$$
$$dx = 2t\ dt$$

Con lo cual:

$$I = \int \frac{x}{1+\sqrt{x}} dx = \int \frac{t^2}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t^3}{1+t} dt$$

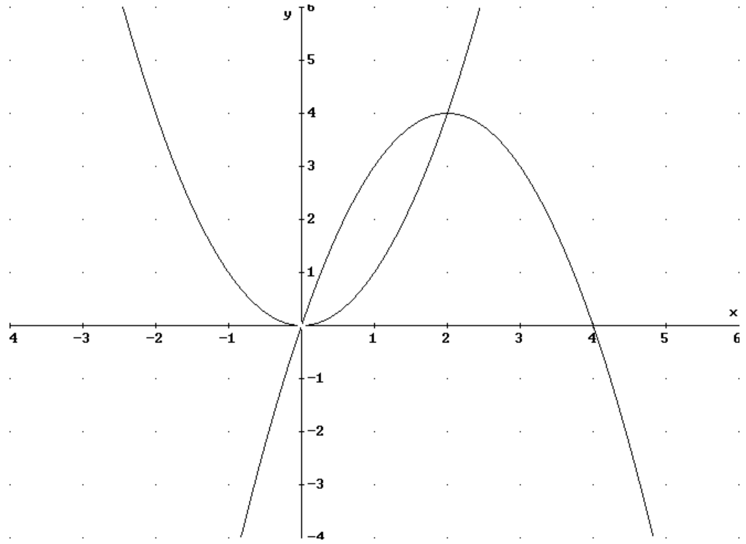
Es una integral racional, hacemos la división y descomponemos

$$I = \int \frac{2t^3}{1+t} dt = \int \left(2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{1+t} \right) dt = \frac{2t^3}{3} - t^2 + 2t - 2\ln|1+t| = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 2\sqrt{x} - 2\ln\left|1+\sqrt{x}\right| + C$$

Considera la región limitada por las curvas $y = x^2$ e $y = -x^2 + 4x$
a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.
b) Expresa el área como una integral.
c) Calcula el área.
MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Las dos funciones son parábolas y podemos dibujarlas dibujarla fácilmente con una tabla de valores.



Calculamos los puntos de corte igualando las dos funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -x^2 + 4x \end{array}\right\} \Rightarrow x^2 = -x^2 + 4x \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \ ; \ x = 2$$

Las dos funciones se cortan en los puntos $(0,0)$ y $(2,4)$

b) El área de la región pedida es:

$$A = \int_0^2 \left((-x^2 + 4x) - (x^2)\right) dx = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\ dx$$

c) Calculamos el área

$$A = \int_0^2 (-2x^2 + 4x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} \right]_0^2 = \left(-\frac{16}{3} + \frac{16}{2} \right) - (0) = \frac{8}{3}\ u^2$$

Calcula $\displaystyle\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **(*sugerencia* $t=\sqrt[4]{x}$).**

MATEMÁTICAS II. 2017. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Como el cambio es $t=\sqrt[4]{x} \Rightarrow t^4 = x$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$4t^3 dt = dx$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=1 \Rightarrow t=\sqrt[4]{1}=1$$

$$x=16 \Rightarrow t=\sqrt[4]{16}=2$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{4t^2 dt}{t+1}$$

Hacemos la división de los dos polinomios, con lo cual:

$$\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}} = \int_1^2 \frac{4t^3 dt}{t^2+t} = \int_1^2 \frac{4t^2 dt}{t+1} = \int_1^2 \left(4t-4+\frac{4}{t+1}\right) dt = \left[2t^2-4t+4\ \ln|t+1|\right]_1^2 =$$
$$=\left(8-8+4\ \ln 3\right)-\left(2-4+4\ln 2\right) = 2+4\ln\frac{3}{2} = 3'62$$

Considera la función dada por $f(x)=\sqrt{3+|x|}$ para $x\in\left[-3,3\right]$.
a) Expresa la función *f* definida a trozos.
b) Halla $\int_{-3}^{3} f(x)\,dx$
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Abrimos la función

$$f(x)=\sqrt{3+|x|}=\begin{cases}\sqrt{3-x} & si \quad -3\le x\le 0\\ \sqrt{3+x} & si \quad 0<x\le 3\end{cases}$$

b) Calculamos la integral

$$\int_{-3}^{3} f(x)\,dx=\int_{-3}^{0}\sqrt{3-x}\,dx+\int_{0}^{3}\sqrt{3+x}\,dx=\int_{-3}^{0}(3-x)^{\frac{1}{2}}\,dx+\int_{0}^{3}(3+x)^{\frac{1}{2}}\,dx=$$

$$=\left[-\frac{2(3-x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{-3}^{0}+\left[\frac{2(3+x)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{0}^{3}=8\sqrt{6}-4\sqrt{3}$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\,arc\,tg(x)$. Determina la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,\pi)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral por partes

$$F(x)=\int x\,arc\,tg\,x\;dx=\frac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\frac{1}{2}\int\frac{x^2}{1+x^2}dx=\frac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\frac{1}{2}\left[\int 1dx+\int\frac{-1}{1+x^2}dx\right]=$$
$$=\frac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}arc\,tg\,x+C$$

$$u=arc\,tg\,x;\;\; du=\frac{1}{1+x^2}\,dx$$
$$dv=xdx;\; v=\frac{x^2}{2}$$

Calculamos el valor de la constante *C*.

$$F(0)=\pi\Rightarrow\pi=0-0+0+C\Rightarrow C=\pi$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}arc\,tg\,x-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}arc\,tg\,x+\pi$

Sea *f* la función definida como $f(x)=(x+2)\ \ln(x)$ para $x>0$, donde $\ln(x)$ representa al logaritmo neperiano de *x*.

a) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) Encuentra la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(1,0)$.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral, que es una integral por partes.

$$u=\ln x;\ \ du=\frac{1}{x}\,dx$$
$$dv=(x+2)\,dx;\ v=\frac{x^2}{2}+2x$$

$$I=\int(x+2)\cdot ln\,x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot ln\,x-\int\frac{1}{x}\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2-2x+C$$

Calculamos una primitiva que pase por el punto $(1,0)$.

$$F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2-2x+C\Rightarrow 0=\left(\frac{1}{2}+2\right)\cdot ln1-\frac{1}{4}-2+C\Rightarrow C=\frac{9}{4}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x)=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot ln\,x-\frac{1}{4}x^2-2x+\frac{9}{4}$

a) Halla $\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}\, dx$ (sugerencia $t=1+x^3$).
b) Halla la primitiva cuya gráfica pasa por $(2,0)$.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t=1+x^3$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$3x^2 dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3x^2}$$

Sustituyendo, tenemos:

$$\int \frac{x^2}{(1+x^3)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \int \frac{\frac{dt}{3}}{t^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{3}\int t^{-\frac{3}{2}}\, dt = \frac{1}{3}\left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{2}{3t^{\frac{1}{2}}} = -\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + C$$

b) Hallamos la primitiva que pasa por el punto $(2,0)$.

$$F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + C \Rightarrow F(2) = -\frac{2}{3\sqrt{1+2^3}} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{2}{9}$$

Luego, la primitiva que nos piden es: $F(x) = -\frac{2}{3\sqrt{1+x^3}} + \frac{2}{9}$

Sea $I=\int_{0}^{8}\frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,dx$

a) Expresa *I* aplicando el cambio de variable $t=2+\sqrt{x+1}$**.**

b) Calcula el valor de *I*.

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Como el cambio es $t=2+\sqrt{x+1}\Rightarrow\sqrt{x+1}=t-2\Rightarrow$, vamos a calcular cuanto vale *dx*:

$$\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\,dx=dt\Rightarrow dx=2(t-2)\,dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración:

$$x=8\Rightarrow t=2+\sqrt{8+1}=5$$

$$x=0\Rightarrow t=2+\sqrt{0+1}=3$$

Sustituyendo, tenemos:

$$I=\int_{0}^{8}\frac{1}{2+\sqrt{x+1}}\,dx=\int_{3}^{5}\frac{1}{t}\cdot 2(t-2)dt=2\int_{3}^{5}\frac{(t-2)}{t}dt=2\int_{3}^{5}\left(1-\frac{2}{t}\right)dt$$

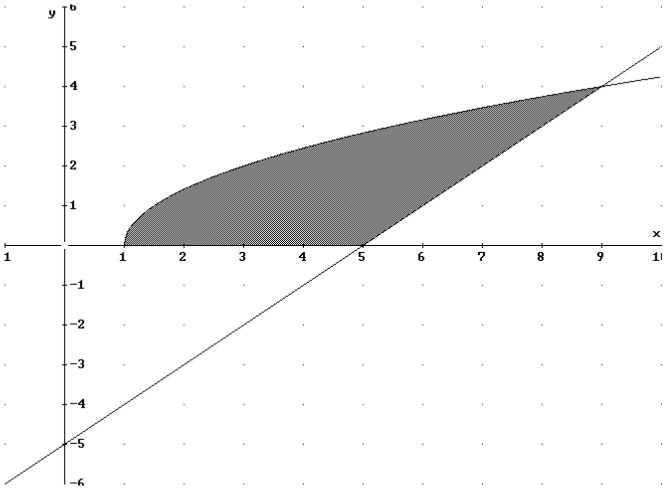
b) Calculamos el valor de *I*:

$$I=2\int_{3}^{5}\left(1-\frac{2}{t}\right)dt=2\left[t-2\ln t\right]_{3}^{5}=2\left[5-2\ln 5\right]-2\left[3-2\ln 3\right]=4+4\ln\frac{3}{5}$$

Considera la región limitada por la gráfica de la función dada por $f(x)=\sqrt{2x-2}$ para $x \geq 1$, la recta $y = x - 5$ y el eje de abscisas.
a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte entre la gráfica de f y las rectas.
b) Expresa mediante integrales el área del recinto anterior.
c) Calcula el área.
MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo del recinto:



Calculamos los puntos de corte:

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{2x-2} \\ y=x-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2x-2}=x-5 \Rightarrow 2x-2=x^2+25-10x \Rightarrow x^2-12x+27=0 \Rightarrow x=9$$

Luego, se cortan en el punto: $(9,4)$

$$\left.\begin{array}{l} y=\sqrt{2x-2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{2x-2}=0 \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow x=1$$

Luego, se cortan en el punto: $(1,0)$

b) $A=\int_1^5\left(\sqrt{2x-2}-0\right)\,dx+\int_5^9\left(\sqrt{2x-2}-x+5\right)\,dx$

c) Calculamos el área

$$A=\int_1^5\left(\sqrt{2x-2}-0\right)\,dx+\int_5^9\left(\sqrt{2x-2}-x+5\right)\,dx=\left[\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_1^5+\left[\frac{(2x-2)^{\frac{3}{2}}}{3}-\frac{x^2}{2}+5x\right]_5^9=\frac{40}{3}\,u^2$$

Calcula $\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$ (sugerencia $t=\sqrt[3]{x}$)

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

$$\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow x=t^3$$
$$dx=3t^2\, dt$$

Calculamos los nuevos límites de integración: $\begin{matrix} x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=3 \Rightarrow t=\sqrt[3]{3} \end{matrix}$

Con lo cual:

$$I=\int_0^{\sqrt[3]{3}} \frac{1}{1+t} 3t^2 dt = 3\int_0^{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{t^2}{1+t}\right) dt = 3\int_0^{\sqrt[3]{3}} \left(t-1+\frac{1}{1+t}\right) dt = 3\cdot\left[\frac{t^2}{2}-t+\ln(1+t)\right]_0^{\sqrt[3]{3}} =$$
$$=3\cdot\left[\frac{\sqrt[3]{9}}{2}-\sqrt[3]{3}+\ln(1+\sqrt[3]{3})\right]$$

Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2017. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Como el polinomio del numerador y del denominador tienen igual grado, lo primero que hacemos es dividir.

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \left(1-\frac{2x}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)dx$$

Calculamos las raíces del denominador: $(x+1)^2 = 0 \Rightarrow x=-1\ ;\ x=-1$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} = \frac{A(x+1)+B}{(x+1)^2}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular A y B sustituimos el valor de la raíz y otro valor en los dos numeradores

$x=-1 \Rightarrow -1 = B$

$x=0 \Rightarrow 0 = A+B \Rightarrow 0 = A-1 \Rightarrow A=1$

Con lo cual:

$$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx = \left[x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{x}{(x+1)^2}\right)dx = \left[x\right]_0^1 - 2\int_0^1 \left(\frac{1}{x+1}\right)dx - 2\int_0^1 \left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)dx =$$

$$= \left[x\right]_0^1 - 2\left[\ln(x+1)\right]_0^1 + 2\left[\frac{-1}{x+1}\right]_0^1 = 1-2\ln 2 - 1 + 2 = 2-2\ln 2$$

Determina la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f''(x)=x\cdot e^{x}$, cuya gráfica pasa por el origen de coordenadas y tiene un extremo relativo en $x=1$.
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Integramos dos veces, por partes, para calcular la expresión de $f(x)$.

$$f'(x)=\int x\cdot e^{x}dx=x\cdot e^{x}-\int e^{x}dx=x\cdot e^{x}-e^{x}+C$$

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=e^{x}dx;\ v=e^{x} \end{array}}$$

$$f(x)=\int\left(x\cdot e^{x}-e^{x}+C\right)dx=x\cdot e^{x}-e^{x}-e^{x}+Cx+D$$

Calculamos los valores de C y D.

- Pasa por $(0,0)\Rightarrow 0-e^{0}-e^{0}+o+D=0\Rightarrow D=2$

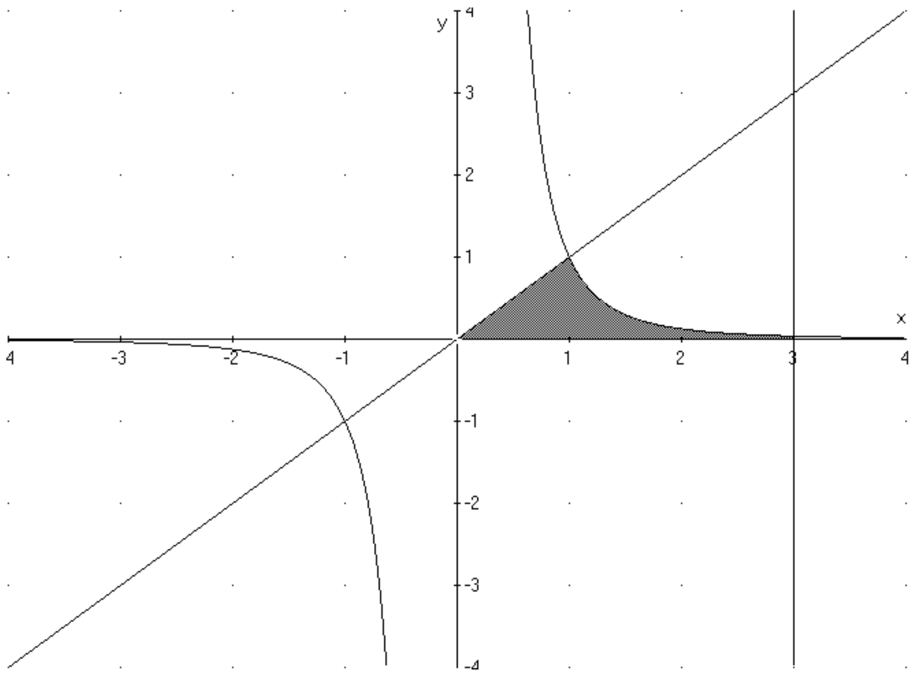
- Extremo relativo en $x=1\ \Rightarrow\ f'(1)=0\Rightarrow e-e+C=0\Rightarrow C=0$

Luego, la función es: $f(x)=x\cdot e^{x}-2e^{x}+2$

Considera el recinto del primer cuadrante limitado por el eje OX, la recta $y=x$, la gráfica $y=\frac{1}{x^3}$ y la recta $x=3$.
a) Haz un esbozo del recinto descrito.
b) Calcula el área del recinto
c) Si consideras la gráfica $y=\frac{1}{x}$ en lugar de $y=\frac{1}{x^3}$, el área del recinto correspondiente ¿será mayor o será menor que la del recinto inicial.?. ¿Por qué?
MATEMÁTICAS II. 2017. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos un esbozo del recinto



b) Calculamos el área del recinto

$$A=A_1+A_2=\int_0^1(x-0)\,dx+\int_1^3\left(\frac{1}{x^3}-0\right)dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1+\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3=\frac{1}{2}-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}=\frac{17}{18}\ u^2$$

c) Será mayor. Ya que $A_2=\int_1^3\left(\frac{1}{x^3}-0\right)dx=\left[-\frac{1}{2x^2}\right]_1^3=-\frac{1}{18}+\frac{1}{2}=\frac{4}{9}\ u^2$

y si utilizamos la función $\frac{1}{x}$, entonces: $A_2=\int_1^3\left(\frac{1}{x}-0\right)dx=\left[\ln x\right]_1^3=\ln 3-\ln 1=1'09\ u^2$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = \left| x^2 - 2x \right|$.

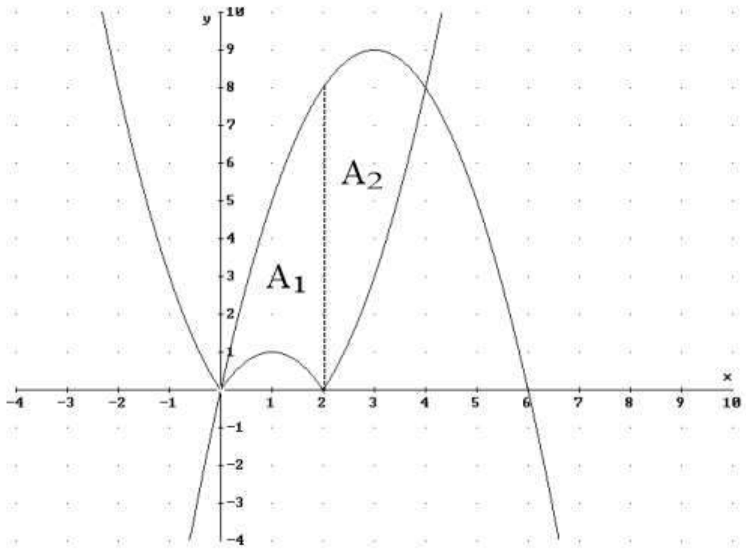
a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

b) Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Dibujamos la función $f(x) = 6x - x^2$ que es una parábola, calculando el vértice y haciendo una tabla de valores. Abrimos la función $g(x) = \left| x^2 - 2x \right| = \begin{cases} x^2 - 2x & si \; x \le 0 \\ -x^2 + 2x & si \; 0 < x < 2 \\ x^2 - 2x & si \; x \ge 2 \end{cases}$ y hacemos el dibujo.



Calculamos los puntos de corte de las dos funciones:

$$\left. \begin{array}{l} y = 6x - x^2 \\ y = x^2 - 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 6x - x^2 = x^2 - 2x \Rightarrow 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x = 0 \;;\; x = 4$$

Luego, los puntos de corte son el $(0,0)$ y $(4,8)$

b) Calculamos el área que nos piden

$$A = A_1 + A_2 = \int_0^2 \left[(6x - x^2) - (-x^2 + 2x) \right] dx + \int_2^4 \left[(6x - x^2) - (x^2 - 2x) \right] dx =$$

$$= \int_0^2 4x \, dx + \int_2^4 (-2x^2 + 8x) \, dx = \left[2x^2 \right]_0^2 + \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 \right]_2^4 = 8 + \left(-\frac{128}{3} + 64 \right) - \left(-\frac{16}{3} + 16 \right) = \frac{56}{3} \; u^2$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = 3 - x^2$ y $g(x) = -\dfrac{x^2}{4}$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 1$ y comprueba que también es tangente a la gráfica de *g*. Determina el punto de tangencia con la gráfica de *g*.

b) Esboza el recinto limitado por la recta $y = 4 - 2x$ y las gráficas de *f* y *g*. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (y la recta).

c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. JUNIO. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

En el examen original había un error. Las gráficas estaban cambiadas, es decir, *f* era *g* y *g* era *f*.

R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la tangente es $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$

Calculamos: $f(1) = 3 - 1^2 = 2$

$$f'(x) = -2x \Rightarrow f'(1) = -2 \cdot 1 = -2$$

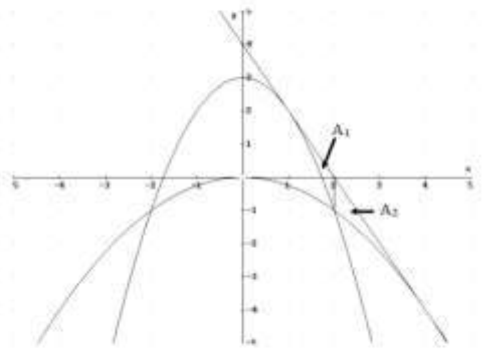
Sustituimos y calculamos la tangente: $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1) \Rightarrow y - 2 = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + 4$

Comprobamos que también es tangente a *g*

$$\left. \begin{array}{l} g(x) = -\dfrac{x^2}{4} \\ y = -2x + 4 \end{array} \right\} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -2x + 4 \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0 \Rightarrow x = 4$$

Luego, es tangente y el punto de tangencia es $(4, -4)$.

b) Hacemos el dibujo de las dos parábolas y la recta.



Los puntos de corte son: $(1,2)$, $(2,-1)$, $(-2,-1)$ y $(4,-4)$

c) Calculamos el área que nos piden.

$$A = A_1 + A_2 = \int_1^2 \left[(-2x + 4) - (3 - x^2)\right] dx + \int_2^4 \left[(-2x + 4) - \left(-\frac{x^2}{4}\right)\right] dx =$$

$$= \int_1^2 (x^2 - 2x + 1)\, dx + \int_2^4 \left(\frac{x^2}{4} - 2x + 4\right) dx = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_1^2 + \left[\frac{x^3}{12} - x^2 + 4x\right]_2^4 =$$

$$= \left(\frac{8}{3} - 4 + 2\right) - \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) + \left(\frac{64}{12} - 16 + 16\right) - \left(\frac{8}{12} - 4 + 8\right) = 1 \ u^2$$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=e^{2-x}$
a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=2$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de f, el eje de ordenadas y la recta $x+y=3$.
c) Calcula el área del recinto indicado.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

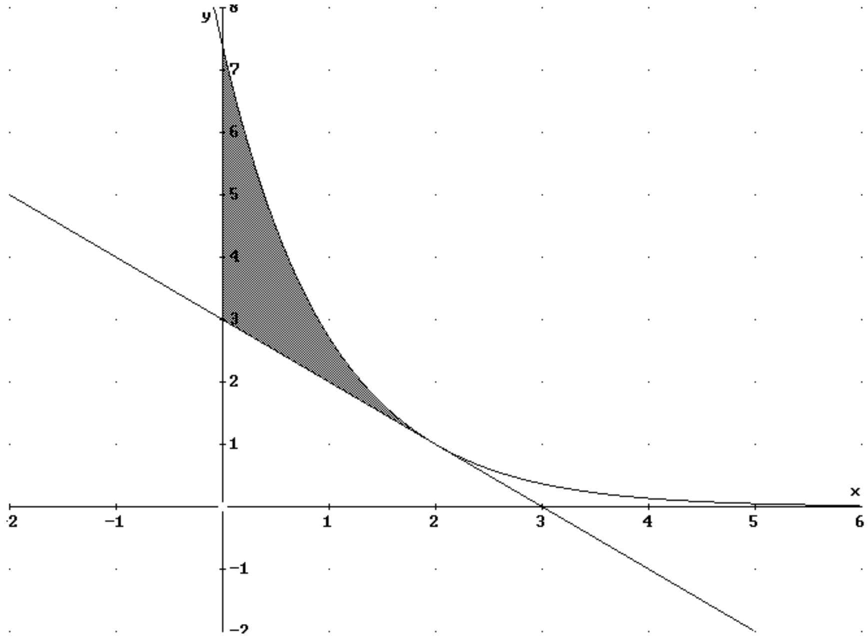
R E S O L U C I Ó N

a) La ecuación de la recta tangente será $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)$

- $f(2)=e^{0}=1$
- $f'(x)=-e^{2-x}\Rightarrow f'(2)=-e^{0}=-1$

Sustituyendo, tenemos que: $y-f(2)=f'(2)\cdot(x-2)\Rightarrow y-1=-1\cdot(x-2)\Rightarrow y=-x+3$

b) Dibujamos el recinto que nos dicen.



c) Calculamos el área del recinto

$$\int_0^2\left[(e^{2-x})-(-x+3)\right]dx=\int_0^2(e^{2-x}+x-3)\,dx=\left[-e^{2-x}+\frac{x^2}{2}-3x\right]_0^2=\left(-e^{0}+2-6\right)-\left(-e^{2}\right)=e^{2}-5\ u^2$$

Considera la función $f:\left(-\frac{e}{2},+\infty\right)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\ln(2x+e)$, donde $\ln$ denota logaritmo neperiano.
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f* calculando sus puntos de corte con los ejes coordenados.
b) Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de *f* y los ejes de coordenadas.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 1. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

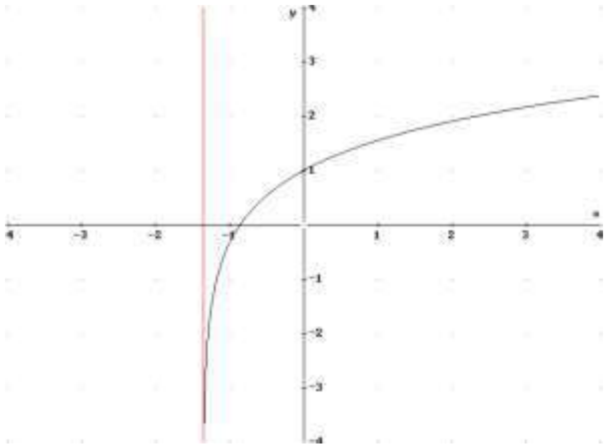
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los puntos de corte con los ejes.

Corte con el eje X $\Rightarrow y=0\Rightarrow \ln(2x+e)=0\Rightarrow e^{0}=2x+e\Rightarrow x=\dfrac{1-e}{2}$

Corte con el eje Y $\Rightarrow x=0\Rightarrow y=\ln e\Rightarrow y=1$

La recta $x=\dfrac{-e}{2}$ es una asíntota vertical, ya que $\lim\limits_{x\to -\frac{e}{2}}\ln(2x+e)=-\infty$



b) Calculamos la integral $\int \ln(2x+e)\,dx$ que es por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=\ln(2x+e);\ \ du=\dfrac{2}{2x+e}\,dx \\ dv=dx \qquad ;\quad v=x \end{array}}$$

$$\int \ln(2x+e)\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}\,dx$$

La integral que sale es racional, dividimos y la hacemos

$$\int \ln(2x+e)\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\frac{2x}{2x+e}\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-\int\left(1-\frac{e}{2x+e}\right)dx=$$

$$x\cdot\ln(2x+e)-\int dx+\frac{e}{2}\int\frac{2}{2x+e}\,dx = x\cdot\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)+C$$

Calculamos el área que nos piden.

$$\int_{\frac{1-e}{2}}^{0}\ln(2x+e)dx=\left[x\cdot\ln(2x+e)-x+\frac{e}{2}\ln(2x+e)\right]_{\frac{1-e}{2}}^{0}=\frac{e}{2}-\frac{-1+e}{2}=\frac{1}{2}\ u^{2}$$

Determina la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\frac{1}{(x-1)^2}$ y que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x=2$ es $y=x+2$.
MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos $f'(x)$

$$f'(x)=\int\frac{1}{(x-1)^2}\,dx=\int(x-1)^{-2}\,dx=\frac{-1}{(x-1)}+C$$

Calculamos $f(x)$

$$f(x)=\int\left(\frac{-1}{(x-1)}+C\right)dx=-\ln|x-1|+Cx+D$$

La recta tangente en el punto $x=2$ tiene de pendiente 1, es decir, que $f'(2)=1$, luego:

$$f'(2)=\frac{-1}{(2-1)}+C=1\Rightarrow C=2$$

En el punto $x=2$, la recta tangente y la función coinciden, es decir, que $f(2)=4$, luego:

$$f(2)=-\ln|2-1|+2\cdot 2+D=4\Rightarrow D=0$$

Luego, la función que nos piden es: $f(x)=-\ln|x-1|+2x$

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x\cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

a) Calcula $\int f(x)\,dx$

b) Encuentra la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto $(0,1)$.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 2. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Vamos a calcular la integral $I=\int x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u=x;\ du=dx \\ dv=\cos\frac{x}{2}dx;\ v=2\,sen\frac{x}{2} \end{array}}$$

$$F(x)=\int x\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)dx=2x\cdot sen\frac{x}{2}-2\int sen\frac{x}{2}dx=2x\cdot sen\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}+C$$

Calculamos la constante:

$$F(0)=1\Rightarrow 2\cdot 0\cdot sen0+4\cos 0+C=1\Rightarrow C=1-4=-3$$

Por lo tanto, la primitiva que nos piden es:

$$F(x)=2x\cdot sen\frac{x}{2}+4\cos\frac{x}{2}-3$$

Siendo $a>1$, considera el rectángulo de vértices $A(1,0), B(1,1), C(a,1)\ y\ D(a,0)$. La gráfica de la función *f* definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ para $x\neq 0$ divide al rectángulo anterior en dos recintos.

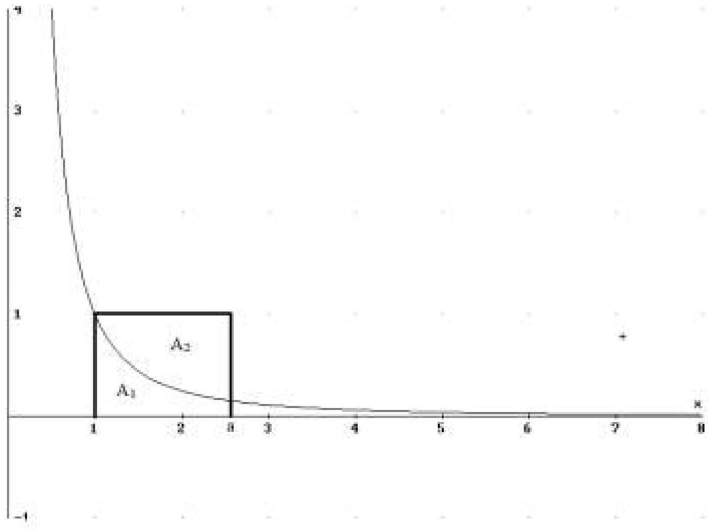
a) Haz un esbozo de la gráfica de *f* y del rectángulo descrito.

b) Determina el valor de *a* para el que los dos recintos descritos tienen igual área.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Hacemos el dibujo



b) Calculamos el área de dicho recintos.

El área del primer recinto es:

$$A_1=\int_1^a \left(\frac{1}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{1}{x}\right]_1^a=\left(-\frac{1}{a}\right)-(-1)=-\frac{1}{a}+1\ u^2$$

El área del segundo recinto es igual al área del rectángulo menos el área del primer recinto:

$$A_2=(a-1)+\frac{1}{a}-1=a+\frac{1}{a}-2\ u^2$$

Igualando las dos áreas tenemos que:

$$A_1=A_2\Rightarrow -\frac{1}{a}+1=a+\frac{1}{a}-2\Rightarrow a^2-3a+2=0\Rightarrow a=2\ ;\ a=1$$

Luego, el valor que nos piden es $a=2$, ya que $a>1$

Calcula $\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x}\, dx$ donde ln denota logaritmo neperiano (sugerencia $t = e^x$).

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 3. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la integral indefinida con el cambio que nos dicen: $e^x = t \Rightarrow e^x dx = dt$

$$\int \frac{1}{1+e^x}\, dx = \int \frac{1}{1+t} \cdot \frac{dt}{t} = \int \frac{1}{(1+t)\cdot t}\, dt$$

Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{(1+t)\cdot t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t} = \frac{A\cdot t + B(1+t)}{(1+t)\cdot t}$$

Como los denominadores son iguales, los numeradores también tienen que serlo. Para calcular *A y B* sustituimos los valores de las raíces en los dos numeradores.

$t = -1 \Rightarrow 1 = -A \Rightarrow A = -1$

$t = 0 \Rightarrow 1 = B$

Con lo cual:

$$\int \frac{1}{(1+t)\cdot t}\, dt = \int \frac{-1}{1+t} dt + \int \frac{1}{t} dt = -\ln|1+t| + \ln|t| + C = -\ln\left|1+e^x\right| + \ln\left|e^x\right| + C$$

Calculamos la integral definida que nos pedían

$$\int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = \left[-\ln\left|1+e^x\right| + \ln\left|e^x\right|\right]_0^{\ln 2} = \left[-\ln 3 + \ln 2\right] - \left[-\ln 2 + \ln 1\right] = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln\frac{4}{3}$$

Considera las funciones $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = -x^2 - x + 3$ y $g(x) = |x|$.

a) Esboza el recinto limitado por las gráficas de f y g y calcula los puntos de corte entre ambas gráficas.

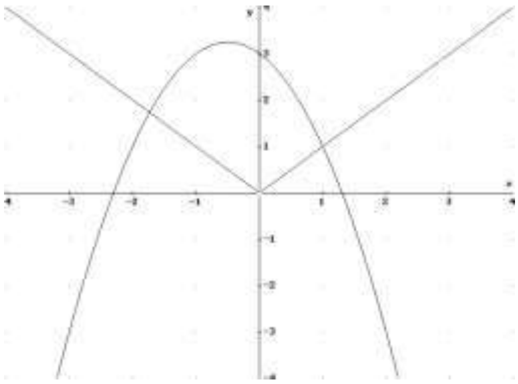
b) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) La función $f(x) = -x^2 - x + 3$ es una parábola cuyo vértice está en el punto $\left(-\frac{1}{2}, \frac{13}{4}\right)$ y corta al eje X en los puntos $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ y $\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$.

La función $g(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$ son dos rectas, que son la bisectriz del 1º y 3er cuadrante.



Calculamos los puntos de corte de las gráficas.

$-x^2 - x + 3 = x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \,;\, x = -3$. Sólo sirve $x = 1$

$-x^2 - x + 3 = -x \Rightarrow x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$. Sólo sirve $x = -\sqrt{3}$

b)

$$A = \int_{-\sqrt{3}}^{0} \left[(-x^2 - x + 3) - (-x)\right] dx + \int_{0}^{1} \left[(-x^2 - x + 3) - (x)\right] dx = \int_{-\sqrt{3}}^{0} (-x^2 + 3)\, dx + \int_{0}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_{-\sqrt{3}}^{0} + \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{3\sqrt{3}}{3} - 3\sqrt{3}\right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) = 2\sqrt{3} + \frac{5}{3} = 5'13 \ u^2$$

Se sabe que la función $f:[0,+\infty]\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{ax} & si \quad 0\le x\le 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & si \quad x>8\end{cases}$ es continua.

a) Determina a.

b) Para $a=8$, calcula $\int_0^{10} f(x)\,dx$

MATEMÁTICAS II. 2018. RESERVA 4. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 8^-}\sqrt{ax}=\sqrt{8a}\\ \lim\limits_{x\to 8^+}\dfrac{x^2-32}{x-4}=8\end{array}\right\}\Rightarrow \sqrt{8a}=8\Rightarrow a=8$

b) $\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx+\int_8^{10}\dfrac{x^2-32}{x-4}\,dx$

$$I_1=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx=\sqrt{8}\int_0^8 x^{\frac{1}{2}}\,dx=\sqrt{8}\left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^8=\frac{128}{3}$$

$$I_2=\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx$$

Como el polinomio del numerador tiene mayor grado que el polinomio del denominador, lo primero que hacemos es dividir, con lo cual:

$$\int\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=\int(x+4)dx+\int\frac{-16}{x-4}\,dx=\frac{x^2}{2}+4x-16\ln|x-4|$$

$$I_2=\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+4x-16\ln|x-4|\right]_8^{10}=\left[(50+40-16\ln 6)-(32+32-16\ln 4)\right]=26-16\ln\frac{3}{2}$$

Por lo tanto:

$$\int_0^{10} f(x)\,dx=\int_0^8\sqrt{8x}\,dx+\int_8^{10}\frac{x^2-32}{x-4}\,dx=\frac{128}{3}+26-16\ln\frac{3}{2}=\frac{206}{3}-16\ln\frac{3}{2}$$

Considera la función f definida por $f(x) = a\,x\ln(x) - b\,x$ para $x > 0$ (ln denota la función logaritmo neperiano). Determina a y b sabiendo que f tiene un extremo relativo en $x = 1$ y que $\int_1^2 f(x)\,dx = 8\ln(2) - 9$

MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Calculamos la derivada de la función: $f'(x) = a\ln(x) + a - b$

Extremo relativo en $x = 1 \Rightarrow f'(1) = 0 \Rightarrow a - b = 0 \Rightarrow a = b$

Vamos a calcular la integral $I = \int (ax \cdot ln\, x - ax)\,dx$, que es una integral por partes.

$$\boxed{\begin{array}{l} u = \ln x;\ du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = ax\,dx;\ v = \dfrac{ax^2}{2} \end{array}}$$

$$I = \int (ax \cdot ln\, x - ax)\,dx = \frac{ax^2}{2} \cdot ln\ x - \frac{1}{2}\int ax\,dx - \frac{ax^2}{2} = \frac{ax^2}{2} \cdot ln\ x - \frac{1}{2}\left(\frac{ax^2}{2}\right) - \frac{ax^2}{2} = \frac{ax^2}{2} \cdot ln\ x - \frac{3ax^2}{4}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx = \left[\frac{ax^2 \ln x}{2} - \frac{3ax^2}{4}\right]_1^2 = \left[\frac{4a\ln 2}{2} - \frac{12a}{4}\right] - \left[-\frac{3a}{4}\right] = \frac{4a\ln 2}{2} - \frac{9a}{4} = 8\ln(2) - 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a\ln 2 - \frac{9a}{4} = 8\ln 2 - 9 \Rightarrow a = 4$$

Luego, $a = b = 4$

Considera la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-2x}$.
a) Determina el punto de la gráfica de *f* en el que la recta tangente es $y=-2ex$.
b) Esboza el recinto limitado por la gráfica de *f*, la recta $y=-2ex$ y el eje de ordenadas.
c) Calcula el área del recinto descrito en el apartado anterior.
MATEMÁTICAS II. 2018. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 2. OPCIÓN B.

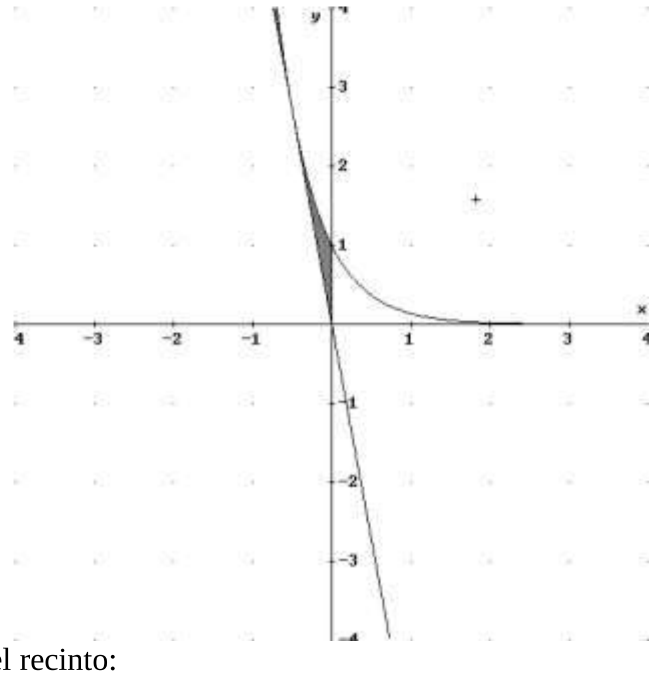
R E S O L U C I Ó N

a) La pendiente de la recta tangente es $-2e$. Calculamos la derivada de la función y la igualamos a $-2e$

$$f'(x)=-2e^{-2x}=-2e\Rightarrow e^{-2x}=e\Rightarrow -2x=1\Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Luego, el punto es: $\left(-\frac{1}{2},e\right)$

b) Hacemos el dibujo



c) Calculamos el área del recinto:

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{0}\left(e^{-2x}+2ex\right)dx=\left[-\frac{e^{-2x}}{2}+ex^2\right]_{-\frac{1}{2}}^{0}=\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{e}{2}+\frac{e}{4}\right)=\frac{e}{4}-\frac{1}{2}\ u^2$$