PROBLEMAS RESUELTOS
SELECTIVIDAD ANDALUCÍA
2011

MATEMÁTICAS II

TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO

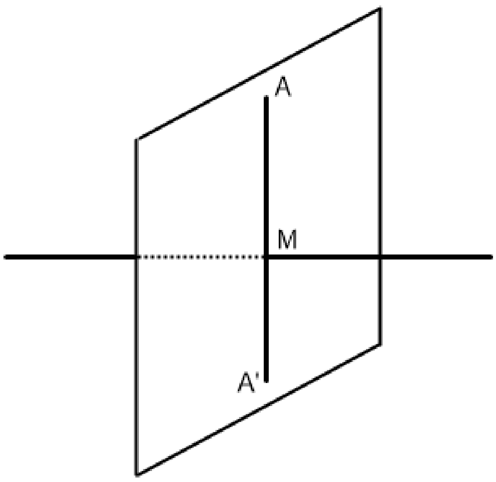
Determina el punto simétrico del punto $A(-3,1,6)$, respecto de la recta r de ecuaciones: $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{2}$.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas: $x-1=\dfrac{y+3}{2}=\dfrac{z+1}{2}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1+t \\ y=-3+2t \\ z=-1+2t \end{array}\right\}$

El punto A' simétrico del punto A respecto de una recta está situado en un plano que pasando por el punto A es perpendicular a dicha recta y además la distancia que hay desde el punto A a la recta es la misma que la que hay desde el punto A' hasta dicha recta.



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto A es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,2,2)$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es: $x+2y+2z+D=0$. Como nos interesa el que pasa por el punto $A(-3,1,6)$

$$-3+2\cdot 1+2\cdot 6+D=0\Rightarrow D=-11\Rightarrow x+2y+2z-11=0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (M); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t)+2(-3+2t)+2(-1+2t)-11=0\Rightarrow t=2$
luego las coordenadas del punto M son: $x=1+2=3;\ y=-3+4=1;\ z=-1+4=3$

Como el punto M es el punto medio del segmento $A\,A'$, si llamamos (a,b,c) a las coordenadas del punto A', se debe verificar que: $\dfrac{-3+a}{2}=3;\ a=9$; $\dfrac{1+b}{2}=1;\ b=1$; $\dfrac{6+c}{2}=3;\ c=0$

Luego, el punto simétrico es: $(9,1,0)$.

Considera los puntos $A=(1,0,-1)$ y $B=(2,1,0)$ y la recta r dada por $\begin{cases} x+y=1 \\ x+z=2 \end{cases}$

a) Determina la ecuación del plano que es paralelo a r y pasa por A y B.

b) Determina si la recta que pasa por los puntos $P=(1,2,1)$ y $Q=(3,4,1)$ está contenida en dicho plano.

MATEMÁTICAS II. 2011. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el vector director de la recta r.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1,-1,-1) = \vec{u}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto A, el vector $\vec{AB}=(1,1,1)$ y el vector $\vec{u}=(1,-1,-1)$ y su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 1 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 2y-2z-2=0 \Rightarrow y-z-1=0$$

b) Si la recta que pasa por P y Q está contenida en el plano eso quiere decir que los puntos P y Q son del plano. Vemos que el punto P si verifica la ecuación del plano, pero el punto Q no la verifica, luego, la recta que pasa por P y Q no está contenida en el plano.

$$2-1-1=0 \Rightarrow P \text{ está en el plano}$$

$$4-1-1 \neq 0 \Rightarrow Q \text{ no está en el plano}$$

Considera los puntos $A(1,0,2)$ y $B(1,2,-1)$.

a) Halla un punto *C* de la recta de ecuación $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y}{2}=z$ que verifica que el triángulo de vértices *A*, *B* y *C* tiene un ángulo recto en *B*.

b) Calcula el área del triángulo de vértices *A*, *B* y *D*, donde *D* es el punto de corte del plano de ecuación $2x-y+3z=6$ con el eje OX.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Si pasamos la recta a paramétricas, cualquier punto C tendrá de coordenadas $C=(1+3t,2t,t)$.

Como el triángulo es rectángulo en *B*, los vectores $\vec{BA}=(0,-2,3)$ y $\vec{BC}=(3t,2t-2,t+1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{BA}\cdot\vec{BC}=(0,-2,3)\cdot(3t,2t-2,t+1)=-4t+4+3t+3=0\Rightarrow t=7$$

Luego, el punto C tiene de coordenadas $C=(1+3t,2t,t)=(22,14,7)$

b) Calculamos el punto de corte del plano con el eje OX, que será: $D=(3,0,0)$

Calculamos los vectores $\vec{AB}=(0,2,-3)$ y $\vec{AD}=(2,0,-2)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -2\end{vmatrix}=-4\vec{i}-6\vec{j}-4\vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\,\textit{módulo}\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{(-4)^2+(-6)^2+(-4)^2}=\frac{\sqrt{68}}{2}\,u^2$$

Considera los planos π_1, π_2 y π_3 dados respectivamente por las ecuaciones:

$$3x-y+z-4=0 \ , \ x-2y+z-1=0 \ \ y \ \ x+z-4=0$$

Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(3,1,-1)$, es paralela a π_1 y corta a la recta intersección de los planos π_2 y π_3.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

R E S O L U C I Ó N

Pasamos a paramétricas la recta intersección de los planos π_2 y π_3.

$$\left.\begin{aligned} x-2y+z-1=0 \\ x+z-4=0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=4-t \\ y=\dfrac{3}{2} \\ z=t \end{cases}$$

Luego, cualquier punto *A* de la recta tiene de coordenadas $A(4-t,\frac{3}{2},t)$.

La recta que nos piden pasa por *P* y *A*, y tiene que ser paralela al plano π_1, luego el vector normal del plano $\vec{n}=(3,-1,1)$ y el vector $\vec{PA}=(1-t,\frac{1}{2},t+1)$ tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{n}\cdot\vec{PA}=(3,-1,1)\cdot(1-t,\frac{1}{2},t+1)=3-3t-\frac{1}{2}+t+1=0\Rightarrow t=\frac{7}{4}$$

El vector de la recta es: $\vec{PA}=(1-\frac{7}{4},\frac{1}{2},\frac{7}{4}+1)=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{2},\frac{11}{4}\right)$.

Por lo tanto, la recta que nos piden es: $\dfrac{x-3}{-\frac{3}{4}}=\dfrac{y-1}{\frac{1}{2}}=\dfrac{z+1}{\frac{11}{4}}$

Dados los puntos $A(1,0,0)$, $B(0,0,1)$ y $P(1,-1,1)$, y la recta *r* definida por $\left.\begin{array}{r} x-y-2=0 \\ z=0 \end{array}\right\}$

a) Halla los puntos de la recta *r* cuya distancia al punto *P* es de 3 unidades.
b) Calcula el área del triángulo *ABP*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left.\begin{array}{r} x-y-2=0 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2+t \\ y=t \\ z=0 \end{array}\right\}$

Cualquier punto C tendrá de coordenadas $C=(2+t,t,0)$. Calculamos el módulo del vector $\vec{PC}=(1+t,t+1,-1)$ y lo igualamos a 3.

$$\left|\vec{PC}\right| = \sqrt{(1+t)^2+(t+1)^2+(-1)^2} = 3 \Rightarrow t^2+2t-3=0 \Rightarrow t=1 \ ; \ t=-3$$

Luego, los puntos son: $C_1=(3,1,0)$; $C_2=(-1,-3,0)$.

b) Calculamos los vectores $\vec{AB}=(-1,0,1)$ y $\vec{AP}=(0,-1,1)$.

Hacemos el producto vectorial de los vectores: $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$

$$\text{Área del triángulo} = \frac{1}{2}\,módulo\left(\vec{AB}\wedge\vec{AP}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}\ u^2$$

Dados el punto $P(1,1,-1)$, y la recta r de ecuaciones $\left.\begin{matrix} x+z=1 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\}$

a) Halla la ecuación del plano que contiene a r y pasa por P.

b) Halla la ecuación de la recta contenida en el plano de ecuación $y+z=0$, que es perpendicular a r y pasa por P.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas: $\left.\begin{matrix} x+z=1 \\ y+z=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=1-t \\ y=-t \\ z=t \end{matrix}\right\}$

La recta pasa por el punto y su vector director es $\vec{u}=(-1,-1,1)$. El plano que nos piden viene definido por el punto $A=(1,0,0)$, el vector $\vec{u}=(-1,-1,1)$ y el vector $\vec{AP}=(0,1,-1)$, luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z & 1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow y+z=0$$

b) La recta pasa por el punto $P=(1,1,-1)$ y su vector director es $\vec{v}=(a,b,c)$.

Como la recta es perpendicular a r, el producto escalar de $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow -a-b+c=0$.

Además la recta está contenida en el plano $y+z=0$, entonces el producto escalar del vector normal del plano $\vec{n}=(0,1,1)$ y el vector $\vec{v}=(a,b,c)$, también es cero, luego: $b+c=0$.

Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones, tenemos:

$$\left.\begin{matrix} -a-b+c=0 \\ b+c=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \vec{v}=(2c,-c,c)$$

Vemos que hay infinitos vectores. Si por ejemplo, damos a c el valor 1, la recta será:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$$

Sea el punto $P(2,3,-1)$, y la recta *r* dada por las ecuaciones $\left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a *r* y que pasa por *P*.
b) Calcula la distancia del punto *P* a la recta *r* y determina el punto simétrico de *P* respecto de *r*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) El vector normal del plano es el vector director de la recta $\vec{u}=\vec{n}=(0,-2,1)$. Luego, todos los planos perpendiculares a r tienen de ecuación: $-2y+z+D=0$. Nos interesa el que pasa por $P=(2,3,-1)$, luego su ecuación será: $-2\cdot 3-1+D=0\Rightarrow D=7\Rightarrow -2y+z+7=0$

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano. Para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano.

$$-2y+z+7=0\Rightarrow -2\cdot(-2\lambda)+\lambda+7=0\Rightarrow \lambda=-\frac{7}{5}$$

Luego, el punto de corte es: $M=\left(1,-2\cdot\left(-\frac{7}{5}\right),-\frac{7}{5}\right)=\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector $\vec{PM}=\left(-1,-\frac{1}{5},-\frac{2}{5}\right)$

$$d=\left|\vec{PM}\right|=\sqrt{(-1)^2+\left(-\frac{1}{5}\right)^2+\left(-\frac{2}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{6}{5}}\ u$$

M es el punto medio del segmento *PP*’, siendo *P*’ el simétrico, luego:

$$M=\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right)=\left(\frac{2+a}{2},\frac{3+b}{2},\frac{-1+c}{2}\right)\Rightarrow a=0\ ;\ b=\frac{13}{5}\ ;\ c=-\frac{9}{5}$$

Luego, el simétrico es: $P'=\left(0,\frac{13}{5},-\frac{9}{5}\right)$

Considera los planos π_1 y π_2 dados, respectivamente, por las ecuaciones

$$(x,y,z)=(-2,0,7)+\lambda(1,-2,0)+\mu(0,1,-1) \quad \text{y} \quad 2x+y-z+5=0$$

Determina los puntos de la recta *r* definida por $x=y+1=\dfrac{z-1}{-3}$ que equidistan de π_1 y π_2.

MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Pasamos el plano π_1 a forma general:

$$\begin{vmatrix} x+2 & 1 & 0 \\ y & -2 & 1 \\ z-7 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2x+y+z-3=0$$

Cualquier punto de la recta tiene de coordenadas: $A=(t,-1+t,1-3t)$.

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|2t-1+t+1-3t-3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{|2t-1+t-1+3t+5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} \Rightarrow |-3|=|6t+3| \Rightarrow t=0 \ ; \ t=-1$$

Luego, los puntos son: si $t=0 \Rightarrow A=(0,-1,1)$; $t=-1 \Rightarrow A=(-1,-2,4)$

Dada la recta *r* definida por $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3$, y la recta *s* definida por $\left.\begin{array}{r} x=1 \\ 2y-z=-2 \end{array}\right\}$
a) Halla la ecuación del plano que pasa por el origen y contiene a *r*.
b) Halla la ecuación del plano que contiene a *s* y es paralelo a *r*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta *r* a implícitas: $\frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=-z+3 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=10 \\ y+2z=5 \end{array}\right\}$

Calculamos el haz de planos, es decir la ecuación de todos los planos que contienen a *r*.

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0$$

De todos esos planos nos interesa el que pasa por el origen de coordenadas, luego, ese punto debe satisfacer la ecuación del plano.

$$x+3z-10+k(y+2z-5)=0 \Rightarrow 0+0-10+k(0+0-5)=0 \Rightarrow k=-2$$

Luego, la ecuación del plano que nos piden es: $x+3z-10-2(y+2z-5)=0 \Rightarrow x-2y-z=0$.

b) Calculamos la ecuación de todos los planos que contienen a s.

$$x-1+k(2y-z+2)=0 \Rightarrow x+2ky-kz-1+2k=0$$

Como queremos que sea paralelo a r, el vector normal del plano $\vec{n}=(1,2k,-k)$ y el vector director de la recta $\vec{u}=(3,2,-1)$, tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar debe valer cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{n}=(3,2,-1)\cdot(1,2k,-k)=3+4k+k=0 \Rightarrow k=-\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, la ecuación del plano que nos piden es: $x+2ky-kz-1+2k=0 \Rightarrow 5x-6y+3z-11=0$

Dada la recta *r* definida por $\frac{x+7}{2}=\frac{y-7}{-1}=z$ y la recta *s* definida por $\begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=\lambda \end{cases}$.

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas.
b) Calcula la distancia entre *r* y *s*.
MATEMÁTICAS II. 2011. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x=-7+2t \\ y=7-t \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=2 \\ y=-5 \\ z=s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta *r* tendrá de coordenadas $A=(-7+2t,7-t,t)$ y cualquier punto de la recta s tendrá de coordenadas $B=(2,-5,s)$

El vector $\vec{AB}$ tendrá de coordenadas: $\vec{AB}=(9-2t,-12+t,s-t)$

Como el vector $\vec{AB}$ tiene que ser perpendicular a la recta *r* y *s* se debe cumplir que:

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}=0 \Rightarrow (9-2t,-12+t,s-t)\cdot(2,-1,1)=0 \Rightarrow 30-6t+s=0$$
$$\vec{AB}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow (9-2t,-12+t,s-t)\cdot(0,0,1)=0 \Rightarrow s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que $t=6$; $s=6$

Luego, los puntos *A* y *B* que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(5,1,6) \ ; \ B=(2,-5,6)$$

a) La recta que nos piden viene definida por: $A=(5,1,6)$ y $\vec{AB}=(-3,-6,0)$. Su ecuación es:

$$\frac{x-5}{-3}=\frac{y-1}{-6}=\frac{z-6}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector $\vec{AB}=(-3,-6,0)$

$$d=\left|\vec{AB}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-6)^2+0}=\sqrt{45}\ u$$

Considera los puntos $A(-1,k,3), B(k+1,0,2), C(1,2,0)$ y $D(2,0,1)$.

a) ¿Existe algún valor de k para el que los vectores $\vec{AB}, \vec{BC}$ y $\vec{CD}$ sean linealmente dependientes?.

b) Calcula los valores de k para los que los puntos A, B, C y D forman un tetraedro de volumen 1.

MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(k+2,-k,-1)$; $\vec{BC}=(-k,2,-2)$; $\vec{CD}=(1,-2,1)$. Para que sean linealmente dependientes, su determinante debe valer cero, luego:

$$\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -k^2-2k-2=0 \Rightarrow \text{ No tiene solución real}$$

Luego, no hay ningún valor de k para el que los vectores sean linealmente dependientes.

b) Calculamos los vectores: $\vec{AB}=(k+2,-k,-1)$; $\vec{AC}=(2,2-k,-3)$; $\vec{AD}=(3,-k,-2)$.

$$V=1=\frac{1}{6}\begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6}\left|-k^2-2k-2\right| \Rightarrow \left|-k^2-2k-2\right|=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -k^2-2k-2=6 \Rightarrow No \\ -k^2-2k-2=-6 \Rightarrow k=-1\pm\sqrt{5} \end{cases}$$

Dados el plano π de ecuación $x+2y-z=0$ y la recta *r* de ecuaciones $\begin{cases} 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{cases}$

a) Halla el punto de intersección del plano π y la recta *r*.
b) Halla el punto simétrico del punto $Q=(1,-2,3)$ respecto del plano π.
MATEMÁTICAS II. 2011. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B

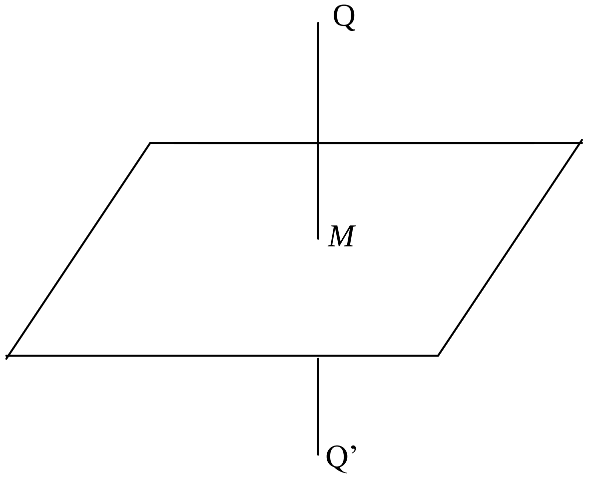
R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el punto de intersección resolviendo el sistema formado por las tres ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0 \\ 3x-y=5 \\ x+y-4z=-13 \end{array}\right\} \Rightarrow x=2\ ;\ y=1\ ;\ z=4$$

Luego, el punto de intersección es $(2,1,4)$

b)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto Q es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta = $(1,2,-1)$.

La ecuación paramétrica de la recta será: $\begin{cases} x=1+t \\ y=-2+2t \\ z=3-t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano (*M*); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano: $(1+t)+2\cdot(-2+2t)-(3-t)=0 \Rightarrow t=1$

Luego, las coordenadas del punto *M* son: $x=2; y=0; z=2$

Como el punto *M* es el punto medio del segmento Q *Q'*, si llamamos (*a*,*b*,*c*) a las coordenadas del punto Q*'*, se debe verificar que:

$$\frac{a+1}{2}=2; a=3\ ;\ \frac{b-2}{2}=0; b=2\ ;\ \frac{c+3}{2}=2; c=1$$

Luego, el punto simétrico es el $Q'(3,2,1)$