

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

De un paralelogramo  $ABCD$  conocemos tres vértices consecutivos:  $A(2,-1,0)$ ,  $B(-2,1,0)$  y  $C(0,1,2)$ .

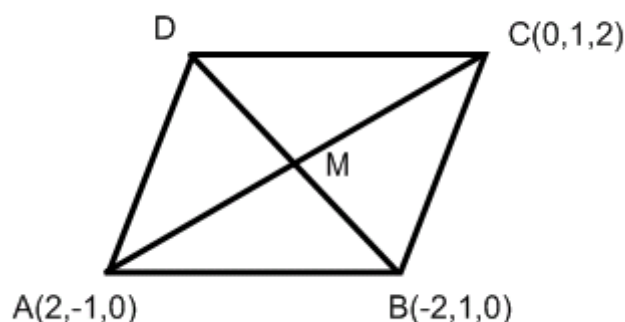
a) Calcula la ecuación de la recta que pasa por el centro del paralelogramo y es perpendicular al plano que lo contiene.

b) Halla el área de dicho paralelogramo.

c) Calcula el vértice  $D$ .

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

### R E S O L U C I Ó N



a) Calculamos las coordenadas del centro del paralelogramo:  $M = \frac{A+C}{2} = (1,0,1)$ . Calculamos el vector normal al plano:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{BA} = (4, -2, 0) \\ \vec{BC} = (2, 0, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = (-4, -8, 4)$$

Luego, la recta que nos piden tiene de ecuación:  $\frac{x-1}{-4} = \frac{y}{-8} = \frac{z-1}{4}$

b) El área del paralelogramo es:

$$\text{Área} = \text{módulo } |\vec{BA} \wedge \vec{BC}| = \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + (4)^2} = \sqrt{96} u^2$$

c) Calculamos las coordenadas del vértice  $D$

$$M = \frac{D+B}{2} \Rightarrow (1,0,1) = \frac{(a,b,c) + (-2,1,0)}{2} \Rightarrow D = (4,-1,2)$$

Sean  $r$  y  $s$  las rectas dadas por:  $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases}$  y  $s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2}$

a) Determina el punto de intersección de ambas rectas.

b) Calcula la ecuación general del plano que las contiene.

MATEMÁTICAS II. 2012. JUNIO. EJERCICIO 4.OPCIÓN B.

## R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y vector director de cada recta.

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 6 \\ x + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 - t \\ y = 3 + 2t \\ z = t \end{cases} \Rightarrow A(3, 3, 0); \vec{u}(-1, 2, 1)$$
$$s \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{2} \Rightarrow B = (1, -1, 0); \vec{v} = (-1, 6, 2)$$

a) Para determinar el punto de corte de las dos rectas resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de las rectas.

$$\frac{3-t-1}{-1} = \frac{3+2t+1}{6} = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 4 \Rightarrow \text{el punto de corte es: } (-1, 11, 4)$$

b) El plano viene definido por el punto  $A$  y los vectores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , luego, su ecuación será:

$$\begin{vmatrix} x-3 & -1 & -1 \\ y-3 & 2 & 6 \\ z & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + y - 4z + 3 = 0$$

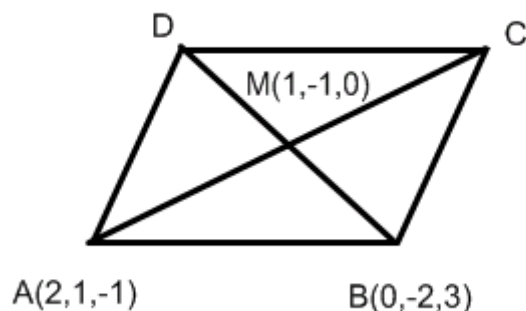
El punto  $M(1, -1, 0)$  es el centro de un paralelogramo y  $A(2, 1, -1)$  y  $B(0, -2, 3)$  son dos vértices consecutivos del mismo.

a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

b) Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A

### R E S O L U C I Ó N



a) Con el punto  $M$  y los vectores  $\vec{MA} = (1, 2, -1)$  y  $\vec{MB} = (-1, -1, 3)$  calculamos la ecuación del plano:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 1 & -1 \\ y+1 & 2 & -1 \\ z & -1 & 3 \end{vmatrix} = 5x - 2y + z - 7 = 0$$

b) Calculamos las coordenadas del vértice C

$$M = \frac{A+C}{2} \Rightarrow (1, -1, 0) = \frac{(2, 1, -1) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow C = (0, -3, 1)$$

Calculamos las coordenadas del vértice D

$$M = \frac{B+D}{2} \Rightarrow (1, -1, 0) = \frac{(0, -2, 3) + (a, b, c)}{2} \Rightarrow D = (2, 0, -3)$$

Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (-2, -3, 4)$  y  $\vec{AD} = (0, -1, -2)$  y el área del paralelogramo es:

$$\vec{AB} \wedge \vec{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = (10, -4, 2)$$

$$\text{Área} = \text{módulo} \left| \vec{AB} \wedge \vec{AD} \right| = \sqrt{(10)^2 + (-4)^2 + (2)^2} = \sqrt{120} \text{ u}^2$$

Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta  $r$  de ecuaciones  $\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$   
**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos un punto y el vector director de cada recta:

$$\text{Eje } OX \equiv \begin{cases} A = (0, 0, 0) \\ \vec{u} = (1, 0, 0) \end{cases} ; \quad r \equiv \begin{cases} 2x = 4 + 3y \\ 2x - z = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 + \frac{3}{2}y \\ y = y \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (2, 0, 4) \\ \vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 1, 0\right) \end{cases}$$

Aplicamos la fórmula que nos da la distancia entre dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{2} & 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{4}{\sqrt{1}} = 4 \text{ u}$$

*módulo*

$$\text{Dadas las rectas } r \equiv \frac{x+3}{-6} = \frac{y-9}{4} = \frac{z-8}{4} \text{ y } s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2}$$

a) Determina la posición relativa de las recta  $r$  y  $s$ .

b) Calcula la distancia entre  $r$  y  $s$ .

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores de la rectas son paralelos, luego las rectas son paralelas.

b) Calculamos el plano perpendicular a  $s$ :  $3x - 2y - 2z + D = 0$ , y queremos que pase por el punto  $A = (-3, 9, 8)$  de la recta  $r$ .

$$3x - 2y - 2z + D = 0 \Rightarrow 3 \cdot (-3) - 2 \cdot (9) - 2 \cdot (8) + D = 0 \Rightarrow D = 43$$

Luego, el plano es:  $3x - 2y - 2z + 43 = 0$ .

Calculamos el punto de corte de la recta  $s$  con el plano:

$$s \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y-9}{-2} = \frac{z-8}{-2} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 9 - 2t \\ z = 8 - 2t \end{cases}$$

$$3x - 2y - 2z + 43 = 0 \Rightarrow 3 \cdot (3 + 3t) - 2 \cdot (9 - 2t) - 2 \cdot (8 - 2t) + 43 = 0 \Rightarrow t = -\frac{18}{17}$$

$$\text{Luego, el punto de corte es: } M = \left( 3 - 3\frac{18}{17}, 9 + 2\frac{18}{17}, 8 + 2\frac{18}{17} \right) = \left( -\frac{3}{17}, \frac{189}{17}, \frac{172}{17} \right)$$

La distancia entre las dos rectas viene dada por el módulo del vector  $\vec{AM} = \left( \frac{48}{17}, \frac{36}{17}, \frac{36}{17} \right)$

Cualquier punto  $C$  tendrá de coordenadas. Calculamos el módulo del vector y lo igualamos a 3.

$$\left| \vec{AM} \right| = \sqrt{\left(\frac{48}{17}\right)^2 + \left(\frac{36}{17}\right)^2 + \left(\frac{36}{17}\right)^2} = \sqrt{\frac{4896}{289}} = \sqrt{\frac{288}{17}} u$$

Los puntos  $A(1,1,5)$  y  $B(1,1,2)$  son vértices consecutivos de un rectángulo  $ABCD$ . El vértice  $C$ , consecutivo a  $B$ , está en la recta  $x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2}$ . Determina los vértices  $C$  y  $D$ .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N



Pasamos la recta a paramétricas:  $x = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 6 - 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ , luego, el vértice  $C$  tiene de

coordenadas  $C(t, 6 - 2t, -1 + 2t)$ .

Los vectores  $\vec{AB}(0,0,-3)$  y  $\vec{BC}(1-t,-5+2t,3-2t)$  tienen que ser perpendiculares, luego, su producto escalar vale 0.

$$\vec{AB} \cdot \vec{BC} = (0,0,-3) \cdot (1-t,-5+2t,3-2t) = -9 + 6t = 0 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$$

El vértice  $C$  tiene de coordenadas:  $C(t, 6 - 2t, -1 + 2t) = \left(\frac{3}{2}, 3, 2\right)$

Como los vectores  $\vec{AB}(0,0,-3)$  y  $\vec{DC}\left(\frac{3}{2}-a, 3-b, 2-c\right)$  son iguales, las coordenadas del vértice  $D$

son:  $D = \left(\frac{3}{2}, 3, 5\right)$

Se consideran los vectores  $\vec{u} = (k, 1, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, -2)$  y  $\vec{w} = (1, 1, k)$ , donde  $k$  es un número real.

a) Determina los valores de  $k$  para los que  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  son linealmente dependientes.

b) Determina los valores de  $k$  para los que  $\vec{u} + \vec{v}$  y  $\vec{v} - \vec{w}$  son ortogonales.

c) Para  $k = -1$ , determina aquellos vectores que son ortogonales a  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$  y tienen módulo 1.

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Los vectores son linealmente dependientes si su determinante vale cero.

$$\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^2 - 1 = 0 \Rightarrow k = \pm 1$$

b) Calculamos los vectores  $\vec{u} + \vec{v} = (2+k, 2, -1)$  y  $\vec{v} - \vec{w} = (1, 0, -2-k)$ , y como son ortogonales, su producto escalar vale cero.

$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{v} - \vec{w}) = (2+k, 2, -1) \cdot (1, 0, -2-k) = 2+k+2+k = 4+2k = 0 \Rightarrow k = -2$$

c) El vector perpendicular a  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , es su producto vectorial.

$$\vec{v} \wedge \vec{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 0, 1)$$

y como tiene que ser unitario, lo dividimos por su módulo.

Luego el vector que nos piden es:  $\left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  o, también el  $\left( -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$



Encuentra los puntos de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3$  cuya distancia al plano  $\pi \equiv x-2y+2z=1$  vale cuatro unidades.

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas:  $\frac{x-1}{4} = \frac{2-y}{2} = z-3 \Rightarrow \begin{cases} x=1+4t \\ y=2-2t \\ z=3+t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tendrá de coordenadas:  $(1+4t, 2-2t, 3+t)$

Aplicamos la fórmula de la distancia de un punto a un plano.

$$\frac{|(1+4t) - 2(2-2t) + 2(3+t) - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{|1+4t - 4 + 4t + 6 + 2t - 1|}{\sqrt{9}} = \frac{|10t+2|}{3} = 4 \Rightarrow |10t+2| = 12 \Rightarrow t=1; t=-\frac{14}{10}$$

Luego, los puntos son: si  $t=1 \Rightarrow A=(5,0,4)$ ;  $t=-\frac{14}{10} \Rightarrow B=\left(-\frac{23}{5}, \frac{24}{5}, \frac{8}{5}\right)$

Determina un punto  $P$  de la recta  $r \equiv \frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3}$  que equidista del origen de coordenadas y del punto  $A(3,2,1)$ .

MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

Pasamos la recta a paramétricas:  $\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z+4}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = -5 + 3t \\ z = -4 + 3t \end{cases}$

Luego, cualquier punto de la recta tiene de coordenadas  $P = (-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t)$ .

Como este punto equidista de  $O$  y de  $A$ , se cumple que:  $|\overline{OP}| = |\overline{AP}|$ .

$$\overline{OP} = (-3 + 2t, -5 + 3t, -4 + 3t) \Rightarrow |\overline{OP}| = \sqrt{(-3 + 2t)^2 + (-5 + 3t)^2 + (-4 + 3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 66t + 50}$$

$$\overline{AP} = (-6 + 2t, -7 + 3t, -5 + 3t) \Rightarrow |\overline{AP}| = \sqrt{(-6 + 2t)^2 + (-7 + 3t)^2 + (-5 + 3t)^2} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110}$$

Igualando, nos queda:

$$\sqrt{22t^2 - 66t + 50} = \sqrt{22t^2 - 96t + 110} \Rightarrow 30t = 60 \Rightarrow t = 2$$

Luego, el punto que nos piden es:  $P = (1, 1, 2)$ .

Considera el punto  $P(1,0,2)$  y la recta  $r$  dada por las ecuaciones  $\begin{cases} 2x - y - 4 = 0 \\ y + 2z - 8 = 0 \end{cases}$ .

a) Calcula la ecuación del plano que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

b) Calcula el punto simétrico de  $P$  respecto de la recta  $r$ .

**MATEMÁTICAS II. 2012. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta a paramétricas:  $r \equiv \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 8 - 2t \\ z = t \end{cases}$ . El vector director de la recta  $(-1, -2, 1)$ , es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$-x - 2y + z + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto  $(1, 0, 2)$ .

$$-x - 2y + z + D = 0 \Rightarrow -1 - 2 \cdot 0 + 2 + D = 0 \Rightarrow D = -1$$

Luego, el plano que nos piden es:  $-x - 2y + z - 1 = 0$ .

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$-x - 2y + z - 1 = 0 \Rightarrow -(6 - t) - 2(8 - 2t) + t - 1 = 0 \Rightarrow t = \frac{23}{6}$$

Luego, el punto de corte es:  $M = \left(6 - \frac{23}{6}, 8 - \frac{46}{6}, \frac{23}{6}\right) = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right)$ .

Si llamamos al punto simétrico  $P' = (a, b, c)$ , se cumple que:

$$\frac{(1, 0, 2) + (a, b, c)}{2} = \left(\frac{13}{6}, \frac{1}{3}, \frac{23}{6}\right) \Rightarrow P' = \left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}, \frac{17}{3}\right)$$

Sean los puntos  $A(0,0,1)$ ,  $B(1,0,-1)$ ,  $C(0,1,-2)$  y  $D(1,2,0)$ .

a) Halla la ecuación del plano  $\pi$  determinado por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ .

b) Demuestra que los cuatro puntos no son coplanarios.

c) Calcula la distancia del punto  $D$  al plano  $\pi$ .

**MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) El plano viene definido por el punto  $A$  y los vectores  $\vec{AB} = (1,0,-2)$ ;  $\vec{AC} = (0,1,-3)$ . Su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \\ z-1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 2x + 3y + z - 1 = 0$$

b) Si los cuatro puntos son coplanarios, el punto  $D$  debe satisfacer la ecuación del plano que hemos calculado en el apartado anterior.

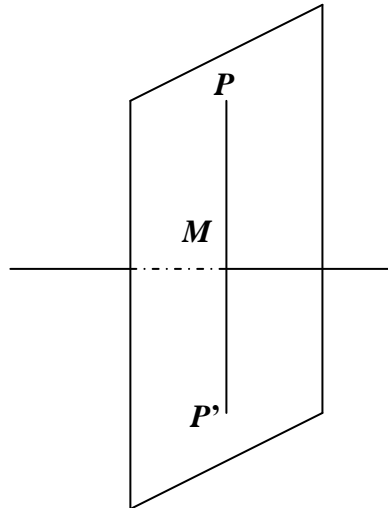
$$2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 0 - 1 \neq 0 \Rightarrow \text{No son coplanarios.}$$

c) Calculamos la distancia

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2} u$$

Halla el punto simétrico de  $P(2,1,-5)$  respecto de la recta  $r$  definida por  $\begin{cases} x-z=0 \\ x+y+2=0 \end{cases}$ .  
**MATEMÁTICAS II. 2012. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación del plano que pasando por el punto  $P$  es perpendicular a la recta. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego:

$$\text{Vector normal del plano} = \text{vector director de la recta} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (1, -1, 1)$$

La ecuación de todos los planos perpendiculares a dicha recta es:  $x - y + z + D = 0$ . Como nos interesa el que pasa por el punto  $P(2,1,-5)$

$$1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-5) + D = 0 \Rightarrow D = 4 \Rightarrow x - y + z + 4 = 0$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $M$ ); para ello pasamos la recta a paramétricas y sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:

$$\left. \begin{array}{l} x - z = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = -2 - t \\ z = t \end{cases}$$

$$t + 2 + t + t + 4 = 0 \Rightarrow 3t = -6 \Rightarrow t = -2$$

luego las coordenadas del punto  $M$  son:  $M(-2, 0, -2)$

Como el punto  $M$  es el punto medio del segmento  $PP'$ , si llamamos  $(a, b, c)$  a las coordenadas del punto  $P'$ , se debe verificar que:  $\frac{2+a}{2} = -2 \Rightarrow a = -6$ ;  $\frac{1+b}{2} = 0 \Rightarrow b = -1$ ;  $\frac{-5+c}{2} = -2 \Rightarrow c = 1$

Luego el simétrico es:  $P' = (-6, -1, 1)$