

**MATEMÁTICAS II**

**TEMA 3: ESPACIO AFIN Y EUCLIDEO**

- Junio, Ejercicio 4, Opción A
- Junio, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 1, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 2, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 3, Ejercicio 4, Opción B
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción A
- Reserva 4, Ejercicio 4, Opción B
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción A
- Septiembre, Ejercicio 4, Opción B

Considera el punto  $P(1,0,5)$  y la recta  $r$  dada por  $\left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\}$ .

a) Determina la ecuación del plano que pasa por  $P$  y es perpendicular a  $r$ .

b) Calcula la distancia de  $P$  a la recta  $r$  y el punto simétrico de  $P$  respecto a  $r$ .

MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

## R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta  $r$  a paramétricas

$$\left. \begin{array}{l} y + 2z = 0 \\ x = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 1 \\ y = -2t \\ z = t \end{array} \right\}$$

Con lo cual el vector director es:  $\vec{u} = (0, -2, 1)$ .

Todos los planos perpendiculares a  $r$  tienen de ecuación:  $-2y + z + D = 0$ . Como queremos que pase por el punto  $P$ :

$$-2y + z + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 0 + 5 + D = 0 \Rightarrow D = -5$$

Luego, el plano que nos piden es:  $-2y + z - 5 = 0$ .

b) Calculamos el punto de corte de la recta con el plano.

$$-2y + z - 5 = 0 \Rightarrow -2 \cdot (-2t) + t - 5 = 0 \Rightarrow t = 1$$

Luego, el punto de corte es:  $M = (1, -2, 1)$

La distancia que nos piden viene dada por el módulo del vector  $\vec{PM} = (0, -2, -4)$ , es decir:

$$\left| \vec{PM} \right| = \sqrt{(0)^2 + (-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} \text{ u}$$

Si llamamos  $P' = (a, b, c)$ , se cumple que el punto  $M$  es el punto medio del segmento  $PP'$ , luego:

$$\frac{1+a}{2} = 1 \Rightarrow a = 1 ; \frac{0+b}{2} = -2 \Rightarrow b = -4 ; \frac{5+c}{2} = 1 \Rightarrow c = -3$$

Por lo tanto, el simétrico es:  $P' = (1, -4, -3)$

Considera las rectas  $r$  y  $s$  dadas por

$$r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas  $r$  y  $s$ , calcula su área.

**MATEMÁTICAS II. 2016. JUNIO. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Pasamos la recta  $s$  a paramétricas y calculamos un punto y el vector director de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1, 1, 1) \\ \vec{u} = (2, -1, 0) \end{cases} \quad y \quad s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 2y \\ y = y \\ z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1, 0, -1) \\ \vec{v} = (-2, 1, 0) \end{cases}$$

Como las componentes de los dos vectores directores de las rectas son proporcionales, los vectores son paralelos y las rectas paralelas, por lo tanto, las rectas son coplanarias.

El plano que nos piden viene definido por el punto  $A$  y los vectores  $\overline{AB} = (-2, -1, -2)$  y  $\vec{u}$ . Por lo tanto su ecuación será:

$$\pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & -2 & 2 \\ y-1 & -1 & -1 \\ z-1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -2x - 4y + 4z + 2 = 0 \Rightarrow -x - 2y + 2z + 1 = 0$$

b) Como las rectas son paralelas, su distancia viene dada por la distancia del punto  $A = (1, 1, 1)$  a la recta  $s$ . Para ello calculamos un plano perpendicular a  $s$  y que pase por el punto  $A = (1, 1, 1)$

$$-2x + y + D = 0 \Rightarrow -2 \cdot 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = 1 \Rightarrow -2x + y + 1 = 0$$

Calculamos el punto de corte del plano con la recta  $s$ .

$$\left. \begin{array}{l} -2x + y + 1 = 0 \\ x = -1 - 2t \\ y = t \\ z = -1 \end{array} \right\} \Rightarrow -2(-1 - 2t) + t + 1 = 0 \Rightarrow 5t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{5}$$

Luego, el punto de corte es el  $M = \left(-1 + \frac{6}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{3}{5}, -1\right)$ . La distancia entre las rectas

viene dada por el módulo del vector  $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{1}{5} - 1, -\frac{3}{5} - 1, -1 - 1\right) = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{8}{5}, -2\right)$ , luego:

$$d = \left| \overrightarrow{AM} \right| = \sqrt{\left(-\frac{4}{5}\right)^2 + \left(-\frac{8}{5}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{36}{5}} u$$

La distancia entre las rectas es el lado del cuadrado, luego su área será:  $S = d^2 = \frac{36}{5} u^2$

Considera un paralelogramo de vértices consecutivos  $A, B, C$  y  $D$  siendo

$$A(1,0,-1), B(3,2,1) \text{ y } C(-7,1,5)$$

a) Determina las coordenadas del punto  $D$ .

b) Calcula el área del paralelogramo.

c) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

**MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) El punto medio de la diagonal  $AC$  es:  $M = \left( \frac{1-7}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{-1+5}{2} \right) = \left( -3, \frac{1}{2}, 2 \right)$

El punto medio de la diagonal  $BD$ , también es  $M$ , luego si llamamos  $D(a, b, c)$ , se tiene que cumplir:

$$M = \left( \frac{3+a}{2}, \frac{2+b}{2}, \frac{1+c}{2} \right) = \left( -3, \frac{1}{2}, 2 \right) \Rightarrow D(-9, -1, 3)$$

b) Calculamos los vectores  $\vec{AB} = (2, 2, 2)$  y  $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$  y aplicamos la fórmula del área del paralelogramo.

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 2 & 2 \\ -10 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (10, -28, 18)$$

$$S = |\vec{AB} \wedge \vec{AD}| = \sqrt{10^2 + 28^2 + 18^2} = \sqrt{1208} = 34,75 \text{ u}^2$$

c) El plano viene definido por el punto  $A = (1, 0, -1)$  y los vectores  $\vec{AB} = (2, 2, 2)$  y  $\vec{AD} = (-10, -1, 4)$ , luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & -10 \\ y & 2 & -1 \\ z+1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 5x - 14y + 9z + 4 = 0$$

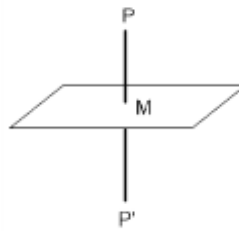
Se considera el punto  $P(1,0,-1)$  y el plano  $\pi$  de ecuación  $2x - y + z + 1 = 0$ .

a) Halla el simétrico del punto  $P$  respecto al plano  $\pi$ .

b) Determina la ecuación del plano que contiene al punto  $P$ , es perpendicular al plano  $\pi$  y es paralelo a la recta dada por  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases}$

**MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 1. EJERCICIO 4. OPCIÓN B**

### R E S O L U C I Ó N



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto  $P$  es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta =  $(2, -1, 1)$ .

La ecuación paramétrica de la recta será:  $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = -1 + t \end{cases}$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $M$ ); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:  $2 \cdot (1 + 2t) - 1 \cdot (-t) + 1 \cdot (-1 + t) + 1 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

Luego, las coordenadas del punto  $M$  son:  $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

Como el punto  $M$  es el punto medio del segmento  $PP'$ , si llamamos  $(a, b, c)$  a las coordenadas del punto  $P'$ , se debe verificar que:  $\frac{a+1}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$  ;  $\frac{b+0}{2} = \frac{1}{3} \Rightarrow b = \frac{2}{3}$  ;  $\frac{c-1}{2} = -\frac{4}{3} \Rightarrow c = -\frac{5}{3}$

Luego, el punto simétrico es el  $P' \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{5}{3}\right)$

b) Calculamos el vector director de la recta  $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = t \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = (2, 1, 0)$

El plano que nos piden viene definido por el punto  $P(1,0,-1)$ , el vector  $\vec{u} = (2, 1, 0)$  y el vector normal del plano  $\vec{n} = (2, -1, 1)$ . Luego, su ecuación es:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 2 \\ y & 1 & -1 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x - 2y - 4z - 5 = 0$$

Sea  $r$  la recta dada por  $\begin{cases} x+z=1 \\ y=-1 \end{cases}$  y sea  $s$  la recta definida por  $\begin{cases} x=2+\lambda \\ y=2 \\ z=2+2\lambda \end{cases}$

a) Comprueba que las rectas  $r$  y  $s$  se cruzan y halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a  $r$  y a  $s$ .

b) Calcula la distancia entre  $r$  y  $s$ .

**MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

a) La recta  $r$  pasa por el punto  $A=(1,-1,0)$  y su vector director es  $\vec{u}=(-1,0,1)$ . La recta  $s$  pasa por el punto  $B=(2,2,2)$  y su vector director es  $\vec{v}=(1,0,2)$ . Las rectas se cruzan si el rango de la matriz formada por los vectores  $\vec{u}=(-1,0,1)$ ,  $\vec{v}=(1,0,2)$  y  $\vec{AB}=(1,3,2)$  es tres. Vamos a comprobarlo.

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3+6=9 \neq 0 \Rightarrow \text{El rango vale 3 y las rectas se cruzan.}$$

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x=1-t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x=2+s \\ y=2 \\ z=2+2s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A=(1-t,-1,t)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B=(2+s,2,2+2s)$ . El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB}=(1+s+t,3,2+2s-t)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular a la recta  $r$  y  $s$  se debe cumplir que:

$$\vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow -1-s-t+2+2s-t=0 \Rightarrow 1+s-2t=0$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow 1+s+t+4+4s-2t=0 \Rightarrow 5+5s-t=0$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que  $t=0$ ;  $s=-1$

Luego, los puntos  $A$  y  $B$  que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A=(1,-1,0) ; B=(1,2,0)$$

La recta perpendicular viene definida por el punto  $A=(1,-1,0)$  y el vector  $\vec{AB}=(0,3,0)$ , luego:

$$\frac{x-1}{0} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{0}$$

b) La distancia es el módulo del vector  $\vec{AB}=(0,3,0)$ , por lo tanto:  $d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{9} = 3$  u

Considera un rectángulo de vértices consecutivos  $A, B, C$  y  $D$  siendo  $A(1,1,0)$  y  $B(2,2,1)$ .

Sabiendo que la recta  $r$  que contiene a los puntos  $C$  y  $D$  pasa por el origen de coordenadas se pide:

a) Halla unas ecuaciones paramétricas de  $r$ .

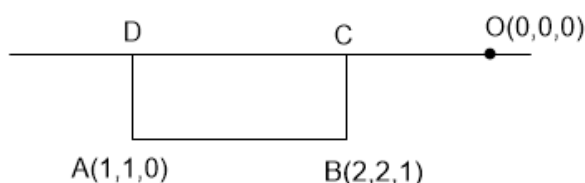
b) Calcula el área del triángulo  $ABC$ .

c) Determina las coordenadas del punto  $D$ .

**MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 2. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### RESOLUCIÓN

a)



La recta que pasa por  $C$  y  $D$  tiene el mismo vector director que la recta que pasa por  $A$  por  $B$ , luego, su ecuación

$$\text{es: } r \equiv \frac{x-0}{1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-0}{1} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

b) Con el punto  $B(2,2,1)$  y el vector  $\vec{AB}(1,1,1)$  hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 2 + 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -5 \Rightarrow x + y + z - 5 = 0$$

Las coordenadas del punto  $C$  son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 5 = 0 \Rightarrow t + t + t - 5 = 0 \Rightarrow t = \frac{5}{3} \Rightarrow C = \left( \frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3} \right)$$

Calculamos los vectores:  $\vec{AB} = (1,1,1)$  ;  $\vec{AC} = \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{5}{3} \right)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:

$$S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| = \frac{1}{2} \text{ módulo } \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{ módulo } (1, -1, 0) = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} u^2$$

c) Con el punto  $A(1,1,0)$  y el vector  $\vec{AB}(1,1,1)$  hallamos un plano perpendicular a la recta

$$x + y + z + D = 0 \Rightarrow 1 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -2 \Rightarrow x + y + z - 2 = 0$$

Las coordenadas del punto  $D$ , son las coordenadas del punto de corte de la recta con este plano, luego:

$$x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow t + t + t - 2 = 0 \Rightarrow t = \frac{2}{3} \Rightarrow D = \left( \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} \right)$$

Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $x + 2y + z = 1$ .

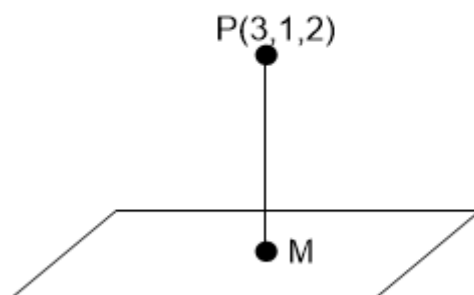
a) Halla el punto de  $\pi$  más próximo al punto  $(3,1,2)$ .

b) Determina la ecuación de un plano paralelo a  $\pi$  que forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área  $\sqrt{6}$ .

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### RESOLUCIÓN

a)



Calculamos la ecuación de la recta que pasando por el punto  $P$  es perpendicular al plano. Como la recta es perpendicular al plano, el vector director de dicha recta y el vector normal del plano son paralelos, luego: Vector normal del plano = vector director de la recta =  $(1, 2, 1)$ .

La ecuación paramétrica de la recta será: 
$$\begin{cases} x = 3 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$$

Calculamos las coordenadas del punto de intersección de la recta con el plano ( $M$ ); para ello sustituimos la ecuación de la recta en la del plano:  $1 \cdot (3 + t) + 2 \cdot (1 + 2t) + 1 \cdot (2 + t) - 1 = 0 \Rightarrow t = -1$

Luego, las coordenadas del punto  $M$  son:  $M = (3 + t, 1 + 2t, 2 + t) = (2, -1, 1)$

b) El plano paralelo tendrá de ecuación:  $x + 2y + z = D$ . Calculamos los puntos de corte con los ejes

coordenados:  $A = (D, 0, 0)$ ;  $B = \left(0, \frac{D}{2}, 0\right)$ ;  $C = (0, 0, D)$

Calculamos los vectores:  $\vec{AB} = \left(-D, \frac{D}{2}, 0\right)$ ;  $\vec{AC} = (-D, 0, D)$

Aplicamos la fórmula que nos da el área del triángulo:  $S = \frac{1}{2} |\vec{AB} \wedge \vec{AC}| =$

$$= \frac{1}{2} \text{módulo} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -D & \frac{D}{2} & 0 \\ -D & 0 & D \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \text{módulo} \left( \frac{D^2}{2}, D^2, \frac{D^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{D^4}{4} + D^4 + \frac{D^4}{4}} = \sqrt{6} \Rightarrow D = \pm 2$$

Luego, la ecuación del plano paralelo es:  $x + 2y + z = 2$  ó  $x + 2y + z = -2$



Sea  $r$  la recta que pasa por los puntos  $A(1,1,0)$  y  $B(3,-1,1)$  y  $s$  la recta dada por

$$\begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases}$$

a) Halla la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas y es paralelo a las rectas dadas.

b) Halla unas ecuaciones paramétricas del plano que pasa por  $B$  y es perpendicular a  $s$ .

**MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 3. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.**

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos los vectores directores de cada recta

$$r \equiv \begin{cases} A = (1,1,0) \\ \vec{u} = \vec{AB} = (2,-2,1) \end{cases} \quad s \equiv \begin{cases} x+2y=-1 \\ y+z=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1-2t \\ y=t \\ z=-1-t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = (-1,0,-1) \\ \vec{v} = (-2,1,-1) \end{cases}$$

El plano que nos piden viene definido por el punto  $(0,0,0)$  y los vectores  $\vec{u} = (2,-2,1)$  y  $\vec{v} = (-2,1,-1)$

La ecuación del plano es:

$$\begin{vmatrix} x-0 & 2 & -2 \\ y-0 & -2 & 1 \\ z-0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x-2z=0$$

No se puede hallar el beneficio de cada empresa ya que es un sistema compatible indeterminado.

b) El vector normal del plano es el vector director de  $s$ , luego:  $-2x + y - z + D = 0$

y queremos que pase por el punto  $B$ :

$$-2 \cdot 3 - 1 - 1 + D = 0 \Rightarrow D = 8$$

El plano que nos piden es:  $-2x + y - z + 8 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = t \\ y = s \\ z = 8 - 2t + s \end{cases}$

Determina el punto de la recta  $r \equiv \frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3}$  que equidista de los planos

$$\pi \equiv x + y + z + 3 = 0 \quad y \quad \pi' \equiv \begin{cases} x = -3 + \lambda \\ y = -\lambda + \mu \\ z = -6 - \mu \end{cases}$$

**MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.**

### R E S O L U C I Ó N

Calculamos la ecuación general del plano  $\pi'$

$$\begin{vmatrix} x+3 & 1 & 0 \\ y & -1 & 1 \\ z+6 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow x+3+z+6+y=0 \Rightarrow x+y+z+9=0$$

Pasamos la recta  $r$  a paramétricas  $\frac{x-1}{2} = y+1 = \frac{z}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = 3t \end{cases}$  y, por tanto, podemos tomar como punto

genérico de la recta  $P = (1+2t, -1+t, 3t)$ .

Como piden los puntos que equidistan de los planos  $\pi$  y  $\pi'$ , tenemos que  $d(P, \pi) = d(P, \pi')$ , luego:

$$d(P, \pi) = d(P, \pi') \Rightarrow \frac{|1+2t-1+t+3t+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|1+2t-1+t+3t+9|}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{|3+6t|}{\sqrt{3}} = \frac{|9+6t|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |3+6t| = |9+6t|$$

de donde salen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} 3+6t &= 9+6t \Rightarrow \text{No tiene solución} \\ 3+6t &= -9-6t \Rightarrow t = -1 \Rightarrow P = (-1, -2, -3) \end{aligned}$$

Considera el plano  $\pi$  de ecuación  $6x - my + 2z = 1$  y la recta  $r$  dada por  $\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1}$

a) Calcula  $m$  en el caso en que la recta  $r$  es perpendicular al plano  $\pi$ .

b) ¿Existe algún valor de  $m$  para el que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$ ?

MATEMÁTICAS II. 2016. RESERVA 4. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

a) Si la recta es perpendicular al plano, el vector director de la recta  $\vec{u} = (-3, 2, -1)$  y el vector normal del plano  $\vec{n} = (6, -m, 2)$ , son paralelos, luego:

$$\frac{6}{-3} = \frac{-m}{2} = \frac{2}{-1} \Rightarrow m = 4$$

b) Pasamos la recta a implícitas

$$\frac{x-1}{-3} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{-1} \Rightarrow \begin{cases} 2x-2 = -3y-3 \\ -x+1 = -3z-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \end{cases}$$

Estudiamos el sistema formado por las tres ecuaciones: 
$$\begin{cases} x+3y = -1 \\ -x+3z = -7 \\ 6x-my+2z = 1 \end{cases}$$

La recta está contenida en el plano si  $Rango(A) = Rango(M) = 2$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \\ 6 & -m & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = 54 + 6 + 3m = 0 \Rightarrow m = -20 \Rightarrow \begin{cases} m = -20 \Rightarrow Rango A = 2 \\ m \neq -20 \Rightarrow Rango A = 3 \end{cases}$$

$$m = -20 \Rightarrow M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -7 \\ 6 & 20 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{F_2+F_1 \\ F_3-6F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-\frac{2}{3}F_2} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{37}{3} \end{pmatrix} \Rightarrow R(M) = 3$$

Luego, no hay ningún valor de  $m$  para el cuál la recta esté contenida en el plano.

Considera el punto  $A(1, -1, 1)$  y la recta  $r$  dada por 
$$\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases} .$$

a) Calcula las coordenadas del punto simétrico de  $A$  respecto a  $r$ .

b) Determina la ecuación del plano que contiene a  $r$  y pasa por  $A$ .

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN A.

### R E S O L U C I Ó N

a) Calculamos el plano perpendicular a  $r$  y que pasa por  $A$ . El vector director de la recta  $(2, -1, 0)$ , es el vector normal del plano, luego, los planos perpendiculares a la recta tienen de ecuación:

$$2x - y + D = 0$$

Como queremos que pase por el punto  $(1, -1, 1)$ .

$$2x - y + D = 0 \Rightarrow 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + D = 0 \Rightarrow D = -3$$

Luego, el plano es:  $2x - y - 3 = 0$ .

Calculamos el punto de corte de la recta con el plano:

$$2x - y - 3 = 0 \Rightarrow 2 \cdot (1 + 2\lambda) - (1 - \lambda) - 3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{5}$$

Luego, el punto de corte es:  $M = \left(1 + \frac{4}{5}, 1 - \frac{2}{5}, 1\right) = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$ .

Si llamamos al punto simétrico  $A' = (a, b, c)$ , se cumple que:

$$\frac{(1, -1, 1) + (a, b, c)}{2} = \left(\frac{9}{5}, \frac{3}{5}, 1\right) \Rightarrow A' = \left(\frac{13}{5}, \frac{11}{5}, 1\right)$$

b) De la recta  $r$  sabemos que:  $B(1, 1, 1)$  y  $\vec{u} = (2, -1, 0)$ . El plano que nos piden viene definido por el punto  $B$  y los vectores  $\vec{u} = (2, -1, 0)$  y  $\vec{AB} = (0, 2, 0)$ , luego:

$$\begin{vmatrix} x-1 & 2 & 0 \\ y-1 & -1 & 2 \\ z-1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4z - 4 = 0 \Rightarrow z - 1 = 0$$

Calcula la distancia entre las rectas dadas por las siguientes ecuaciones:

$$r \equiv x = y = z \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 + \mu \\ z = -\mu \end{cases}$$

MATEMÁTICAS II. 2016. SEPTIEMBRE. EJERCICIO 4. OPCIÓN B.

### R E S O L U C I Ó N

Escribimos las ecuaciones de las dos rectas en forma paramétrica.

$$r \equiv \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 + s \\ z = -s \end{cases}$$

Cualquier punto de la recta  $r$  tendrá de coordenadas  $A = (t, t, t)$  y cualquier punto de la recta  $s$  tendrá de coordenadas  $B = (1 + s, 3 + s, -s)$

El vector  $\vec{AB}$  tendrá de coordenadas:  $\vec{AB} = (1 + s - t, 3 + s - t, -s - t)$

Como el vector  $\vec{AB}$  tiene que ser perpendicular a la recta  $r$  y  $s$  se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \vec{AB} \cdot \vec{u} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t - s - t = 0 \\ \vec{AB} \cdot \vec{v} = 0 &\Rightarrow 1 + s - t + 3 + s - t + s + t = 0 \end{aligned}$$

Resolviendo las dos ecuaciones, obtenemos que  $t = 1$  ;  $s = -1$

Luego, los puntos  $A$  y  $B$  que están a mínima distancia tienen de coordenadas

$$A = (1, 1, 1) \quad ; \quad B = (0, 2, 1)$$

La distancia viene dada por el módulo del vector  $\vec{AB}$

$$d = \left| \vec{AB} \right| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0} = \sqrt{2} \, u$$