Opción A

Ejercicio 1

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}-x^2+bx+1 & \text{si} \quad x\le 1\\ ax^2-5x+2a & \text{si} \quad x>1\end{cases}$, es derivable.

Determina los valores de ***a*** y ***b***

Solución

Para ser derivable debe de ser, primeramente, función continua, después la derivada debe de ser igual en el punto de discontinuidad.

Continuidad

$$\begin{cases}f(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=-1^2+b\times1+1=-1+b+1=b\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=a\times1^2-5\times1+2a=3a-5\end{cases}\Rightarrow f(1)=\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^+}f(x)\Rightarrow b=3a-5$$

$$f'(x)=\begin{cases}-2x+b & \text{si} \quad x\le1\\ 2ax-5 & \text{si} \quad x>1\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}f'(1)=\lim\limits_{x\to1^-}f'(x)=-2.1+b=-2+b\\ \lim\limits_{x\to1^+}f(x)=2a\times1-5=2a-5\end{cases}\Rightarrow f'(1)=\lim_{x\to1^-}f'(x)=\lim_{x\to1^+}f'(x)\Rightarrow b-2=2a-5$$

$$\begin{cases}3a-b=5\\ 2a-b=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3a-b=5\\ -2a+b=-3\end{cases}\Rightarrow a=2\Rightarrow 2.2-b=3\Rightarrow 4-b=3\Rightarrow b=1$$

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+x+1 & \text{si} \quad x\le1\\ 2x^2-5x+4 & \text{si} \quad x>1\end{cases}$$

Ejercicio 2

a) [1'25 puntos] Calcula $\int x\,\text{sen}\,x\,dx$

b) [1'25 puntos] Sean las funciones $f, g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, definidas por $f(x)=x^2-1$ y $g(x)=x-1$. Calcula el área del recinto limitado por sus gráficas

Solución

a)

$$\int x\,\text{sen}\,x\,dx=-x.\cos x-\int -\cos x\,dx=-x.\cos x+\int\cos x\,dx=-x.\cos x+\text{sen}\,x+K$$

$$\begin{cases}x=u\Rightarrow du=dx\\ \text{sen}\,x\,dx=dv\Rightarrow v=\int\text{sen}\,x\,dx=-\cos x\end{cases}$$

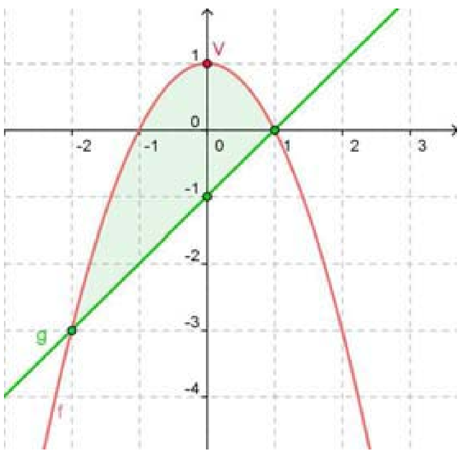
b) **De Conchi Mérida (IES Inca Garcilaso)**

Se dibujan previamente las funciones y el recinto limitado por ellas.

$f(x) = -x^2 + 1$ es una parábola exactamente igual que $-x^2$ pero desplazada una unidad hacia arriba en ordenadas OY. ($-x^2$ es exactamente igual que x^2 pero simétrica respecto al eje de abscisas OX), por tanto su vértice está en (0,1), ramas de la parábola hacia abajo y corta al eje OX en (-1,0) y (1,0).

$g(x) = x - 1$ es una recta y con dos puntos es suficiente para dibujarla.

Un esbozo de sus gráficas es



Igualamos f(x) a g(x) para ver los puntos donde cortan

$-x^2 + 1 = x - 1$, de donde $x^2 + x - 2 = 0$. Resolviendo la ecuación nos resulta x = 1 y x = -2.
Área = $\int_{-2}^{1}[(-x^2 + 1) - (x - 1)]dx = \int_{-2}^{1}(-x^2 - x + 2)dx = [-x^3/3 - x^2/2 + 2x]_{-2}^{1}$
$= (-1/3 - 1/2 + 2) - (8/3 - 2 - 4) = 9/2$ u.a.

Ejercicio 3

[1'25 puntos] a) Resuelve el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+z=2 \\ -x+y+2z=0 \\ -x+2y+5z=2 \end{cases}$

b) [1'25 puntos] Calcula λ sabiendo que el siguiente sistema tiene alguna solución común con el del apartado a) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+3z=1 \\ x+2y+\lambda z=-3 \end{cases}$

Solución

(a)

$$\begin{cases} x \quad + z=2 \\ -x+y+2z=0 & E_2+E_1 \\ -x+2y+5z=2 & E_3+E_1 \end{cases} \approx \begin{cases} x \quad + z=2 \\ y+3z=2 \\ 2y+6z=4 & E_3+E_2(-2) \end{cases} \approx \begin{cases} x \quad + z=2 \\ y+3z=2 \\ 0=0 \end{cases}$$

Como tengo un sistema de 2 ecuaciones con 3 incógnitas es un sistema compatible indeterminado.
Tomo z = "m" nº real y me queda x = 2 – m e y = 2 – 3m.
Solución (x,y,z) = (2 – m, 2 – 3m, m) con "m" nº real.

(b)

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & -3 \end{pmatrix}$ la matriz ampliada del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ -x+y+3z=1 \\ x+2y+\lambda z=-3 \end{cases}$

Para que en principio este sistema tenga alguna solución común con el del sistema del apartado (a), tiene que ser compatible e indeterminado, es decir rango(A) = rango(A^*) = 2.
En A para que tenga rango 2 su determinante tiene que ser cero, es decir |A| = 0.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = 2\lambda - 6$$

Si |A| = 0, tenemos $2\lambda - 6 = 0$, de donde $\lambda = 3$.
Veamos si rango A^* es 2.

En $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda & -3 \end{pmatrix}$ como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1+F_2 \\ \\ F_3+F_2 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= (-1)(-1)(-4-6) \neq 0$, tenemos que el rango A^* = 3, sea cual sea el valor de λ.

Si **λ = 3**, el sistema es incompatible al tener distintos rangos A y A^*. Si **λ ≠ 3**, el sistema tiene solución única, que por Cramer sería:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda-6} = (1)/(\lambda - 3); \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & \lambda \end{vmatrix}}{2\lambda-6} = (\lambda + 7)/(\lambda - 3); \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{2\lambda-6} = (-5)/(\lambda - 3)$$

Para que esta solución coincidiese con la del apartado (a) tendría que verificarse a la vez:
$(1)/(\lambda - 3) = 2 - m$; $(\lambda + 7)/(\lambda - 3) = 2 - 3m$ y $(-5)/(\lambda - 3) = m$.
De $(-5)/(\lambda - 3) = m$, tenemos $\lambda = 3 - 5/m$
De $(1)/(\lambda - 3) = 2 - m$, tenemos $1 = 2\lambda - 6 - \lambda m = \lambda(2 - m) - 6$, luego $\lambda = 7/(2 - m)$
Si las λ fuesen iguales tendríamos $7/(2 - m) = 3 - 5/m$, ecuación que tiene dos soluciones complejas en "m", por tanto no hay ningún valor de λ que haga que el sistema del apartado (b) tenga alguna solución del sistema (a).
Sinceramente creo que en este apartado se han colado un pelín.

Ejercicio 4

[2'5 puntos] Halla la ecuación de la recta que pasa por el punto **A(1 , 1 , -1)**, es paralela al plano de ecuación **x – y + z = 1** y corta al eje **Z**

Solución

El vector formado por el punto **P** y el punto del eje **OZ,** que es un vector de la recta ***r,*** es perpendicular al vector director del plano π , siendo su producto escalar nulo
La ecuación vectorial del eje OZ es (x,y,z) = (0,0, λ) con λ cualquier número real y un vector director genérico del eje OZ sería **z = OZ** = (0,0, λ)

$$\begin{cases} \vec{v_r} = \overrightarrow{AOZ} = (1,1,-1)-(0,0,\lambda) = (1,1,-1-\lambda) \\ \vec{v_\pi} = (1,-1,1) \end{cases} \text{, es decir } \vec{v_r} \perp \vec{v_\pi}\text{, luego } \vec{v_r} \cdot \vec{v_\pi} = 0$$

(1,1,-1- λ)•(1.-1,1) = 0, de donde 1 – 1 – 1 – λ = 0, por tanto – 1 – λ = 0, luego λ = - 1.

$$\vec{v_r} = [1,1,-1-(-1)] = (1,1,0) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=1+1.\mu=1+\mu \\ y=1+1.\mu=1+\mu \\ z=-1+0.\mu=-1 \end{cases}$$

Opción B

Ejercicio 1

[2'5 puntos] Se sabe que la función $f:R \to R$ definida por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, tiene extremos relativos en **(0 , 0)** y **(2 , 2).** Calcula **a, b, c** y **d.**

Solución

$$f'(x)=3ax^2+2bx+c \Rightarrow \begin{cases} f(0)=0 \Rightarrow a.0^3+b.0^2+c.0+d=0 \Rightarrow d=0 \\ f(2)=2 \Rightarrow a.2^3+b.2^2+c.2=2 \Rightarrow 8a+4b+2c=2 \\ f'(0)=0 \Rightarrow 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=0 \Rightarrow c=0 \\ f'(2)=0 \Rightarrow 3a\cdot 2^2+2b\cdot 2=0 \Rightarrow 12a+4b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a+2b=1 \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a+2b=1 \\ -6a-2b=0 \end{cases} \Rightarrow -2a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{2} \Rightarrow 3.\left(-\frac{1}{2}\right)+b=0 \Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

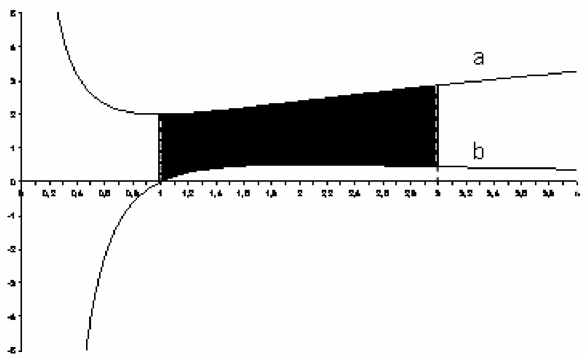
$$f(x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$$

Ejercicio 2

Las dos gráficas del dibujo corresponden a la función $f:(0,+\infty) \to R$ definida por $f(x)=\frac{2}{x}+2\ln x$ y a la de su derivada $f':(0,+\infty) \to R$ (ln denota logaritmo neperiano)

a) [0'5 puntos] Indica, razonando la respuesta, cuál es la gráfica de ***f*** y cuál la de ***f'***
b) [2 puntos] Calcula el área de la región sombreada

Solución



a)

$$f'(x)=-\frac{2}{x^2}+\frac{2}{x}=\frac{2x-2}{x^2}=\frac{2.(x-1)}{x^2}$$

Estudiemos las funciónes por los puntos de corte con el eje OX $\Rightarrow$ y=0

$$\begin{cases}\begin{cases}\frac{2}{x}+\ln x=0 \Rightarrow \frac{2+x\ln x}{x}=0 \Rightarrow 2+x\ln x=0 \Rightarrow \nexists x\in R \\ \text{Extremo relativo en} \Rightarrow x-1=0\end{cases} \\ \frac{2.(x-1)}{x^2}=0 \Rightarrow 2.(x-1)=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\text{Función} \Rightarrow \text{gráfica a} \\ \text{Derivada} \Rightarrow \text{gráfica b}\end{cases}$$

b)

$$\int \ln x\, dx=x.\ln x-\int x.\frac{dx}{x}=x.\ln x-\int dx=x.\ln x-x=x.(\ln x-1)+K$$

$$\begin{cases}u=\ln x \Rightarrow du=\frac{dx}{x} \\ dx=dv \Rightarrow v=\int dx=x\end{cases}$$

$$A=\int_1^3\left(\frac{2}{x}+2\ln x\right)dx-\int_1^3\frac{2.(x-1)}{x^2}dx=\int_1^3\left(\frac{2}{x}+2\ln x\right)dx-\int_1^3\left(\frac{2x}{x^2}-\frac{2}{x^2}\right)dx=\int_1^3\left(\frac{2}{x}+\ln x-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$A=\int_1^3\left(2\ln x+\frac{2}{x^2}\right)dx=2\int_1^3\ln x\,dx+2\int_1^3 x^{-2}\,dx=2.\left[x.(\ln x-1)\right]_1^3+\frac{2}{-2+1}.\left[x^{-1}\right]_1^3$$

$$A=2.\left[3.(\ln 3-1)-2.(\ln 1-1)\right]-2.\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{1}\right)=2.\left[3\times\ln 3-3-.(0-1)\right]-\left(-\frac{4}{3}\right)=6.\ln 3-6-2.(-1)+\frac{4}{3}$$

$$A=6.\ln 3-6+2+\frac{4}{3}=6.\ln 3-4+\frac{4}{3}=6.\ln 3-\frac{8}{3}=\frac{18.\ln 3-8}{3}\ u^2$$

Ejercicio 3

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}$

a) [1 punto] Calcula, si existe, $\mathbf{A^{-1}}$

b) [1'5 puntos] Resuelve el sistema **AX = 3X** e interpreta geométricamente el conjunto de sus soluciones

Solución

a)

$$\exists A^{-1} \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix}-2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2\end{vmatrix}=4+4+4-1+8+8=27\neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{|A|}.\left(\text{adj } A^t\right)$$

$$A^t=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t=\begin{pmatrix}-6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\frac{1}{27}.\begin{pmatrix}-6 & -6 & 3 \\ -6 & 3 & -6 \\ 3 & -6 & -6\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{27}.\begin{pmatrix}-\frac{6}{27} & -\frac{6}{27} & \frac{3}{27} \\ -\frac{6}{27} & \frac{3}{27} & -\frac{6}{27} \\ \frac{3}{27} & -\frac{6}{27} & -\frac{6}{27}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & -\frac{2}{9}\end{pmatrix}$$

b)

$$\begin{pmatrix}-2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & -2\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix}=3.\begin{pmatrix}x \\ y \\ z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}-2x-2y+z \\ -2x+y-2z \\ x-2y-2z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3x \\ 3y \\ 3z\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}-2x-2y+z=3x \\ -2x+y-2z=3y \\ x-2y-2z=3z\end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases}-5x-2y+z=0 \\ -2x-2y-2z=0 \\ x-2y-5z=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5x+2y-z=0 \\ x+y+z=0 \\ x-2y-5z=0\end{cases} \Rightarrow \text{Son tres planos} \Rightarrow \text{Ecuación homogénea}$$

Como $\begin{vmatrix}5 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -5\end{vmatrix}=-25+2+2+1+10+10=0 \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado y el rango es 2.

Como el sistema es compatible e indeterminado al tener rango es 2, para resolver el sistema sólo necesito dos ecuacione, pues la 3ª ecuación es combinación de las anteriores, por tanto los tres planos se cortan en una recta de ecuación (en forma implícita)
x + y + z = 0
x – 2y – 5z = 0.
He tomado la 2ª y 3ª ecuación del sistema

Ejercicio 4

Sea la recta ***r*** definida por $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 3x+z=0 \end{cases}$

a) [1 punto] Determina la ecuación del plano perpendicular a ***r*** que pasa por el punto **P(1 , 1 , 1)**
b) [1'5 puntos] Halla los puntos de ***r*** cuya distancia al origen es de **4 unidades**

Solución

(a)El plano π tendrá como vector director el de la recta **r** que es perpendicular al vector formado por el punto **P** y el genérico **G** siendo su producto escalar nulo

$$z=-3x \Rightarrow 2y=-3x \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x \Rightarrow \left(1\,,-\frac{3}{2}\,,-3\right) \equiv (2\,,-3\,,-6) \equiv (-2\,,3\,,6) \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=-2\lambda \\ y=3\lambda \\ z=6\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_\pi}=\overrightarrow{v_r}=(-2\,,3\,,6) \\ \overrightarrow{PG}=(x\,,y\,,z)-(1\,,1\,,1)=(x-1\,,y-1\,,z-1) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_\pi}.\overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$(-2\,,3\,,6).(x-1\,,y-1\,,z-1)=0 \Rightarrow -2.(x-1)+3.(y-1)+6.(z-1)=0 \Rightarrow -2x+3y+6z-7=0 \Rightarrow$$

$$\pi \equiv 2x-3y-6z+7=0$$

(b)

$d_{Or}=|4|$, de donde $\sqrt{(-2\lambda-0)^2+(3\lambda-0)^2+(6\lambda-0)^2}=|4|$. Operando y elevando al cuadrado tenemos $49\lambda^2=16$, luego $\lambda=\pm 4/7$. Resumiendo

$$7\lambda=\pm 4 \Rightarrow \begin{cases} \lambda=\frac{4}{7} \Rightarrow R_1 \begin{cases} x=-2.\frac{4}{7}=-\frac{8}{7} \\ y=3.\frac{4}{7}=\frac{12}{7} \\ z=6.\frac{4}{7}=\frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow R_1\left(-\frac{8}{7}\,,\frac{12}{7}\,,\frac{24}{7}\right) \\ \lambda=-\frac{4}{7} \Rightarrow R_1 \begin{cases} x=-2.\left(-\frac{4}{7}\right)=\frac{8}{7} \\ y=3.\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{12}{7} \\ z=6.\left(-\frac{4}{7}\right)=-\frac{24}{7} \end{cases} \Rightarrow R_1\left(\frac{8}{7}\,,-\frac{12}{7}\,,-\frac{24}{7}\right) \end{cases}$$