Opción A

Ejercicio 1

Sea $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x+e^{-x}$.

a) [0'75 puntos] Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ***f***, así como los extremos relativos o locales de ***f***

b) [0'5 puntos] Determina los intervalos de concavidad y convexidad de ***f***

c) [0'75 puntos] Determina las asíntotas de la gráfica de ***f***.

d) [0'5 puntos] Esboza la gráfica de ***f***

Solución

a)

$$f'(x)=1-e^{-x} \Rightarrow \text{ Crecimiento} \Rightarrow f'(x)>0 \Rightarrow 1-e^{-x}>0 \Rightarrow -e^{-x}>-1 \Rightarrow e^{-x}<1 \Rightarrow \frac{1}{e^{x}}<1 \Rightarrow e^{x}>1 \Rightarrow$$

$$e^{x}>e^{0} \Rightarrow x>0$$

Crecimiento $\forall x \in \mathbb{R}/x>0$ ($\forall$ significa "para todo")

Decrecimiento $\forall x \in \mathbb{R}/x<0$

Mínimo relativo y absoluto en $x=0 \Rightarrow f(0)=0+e^{0}=1 \Rightarrow (0,1)$ **(de decrecimiento pasa a crecimiento)**

b)

$f''(x)=e^{-x} \Rightarrow$ Como siempre $f''(x)>0 \Rightarrow e^{-x}>0$ al ser una exponencial, la función siempre es convexa ($\cup$)en todo R.

c)

$$f(x)=x+e^{-x}=x+\frac{1}{e^{+x}}$$

Como esta función no se anula en el denominador, **no tiene asíntotas verticales**.

Como $\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{e^{+x}}\right)=\infty+\frac{1}{\infty}=\infty+0=\infty$, f(x) **no tiene asíntotas horizontales en + ∞**

Como
$$\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{e^{+x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+\frac{1}{e^{-x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+e^{+x}\right)=-\infty+\infty \text{, indeterminación}$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left((-x)(1-\frac{e^{+x}}{-x}\right)^{**}=-\infty(1-\infty)=-\infty(-\infty)=+\infty$$

$$^{**}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{+x}}{-x}\right)=[\frac{+\infty}{-\infty}\text{, aplicando L'Hôpital}]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{e^{+x}}{-1}\right)=-\infty$$

f(x) **no tiene asíntotas horizontales en - ∞**

La recta y=mx+n es asíntota oblicua si $m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ *y* $n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Como $m=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x.e^{+x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{+\infty}\right)=(1+0)=1$, y

$$n=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x+\frac{1}{e^{+x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{+x}}\right)=0$$

La recta y = 1.x+0 = x es asíntota oblicua en + ∞

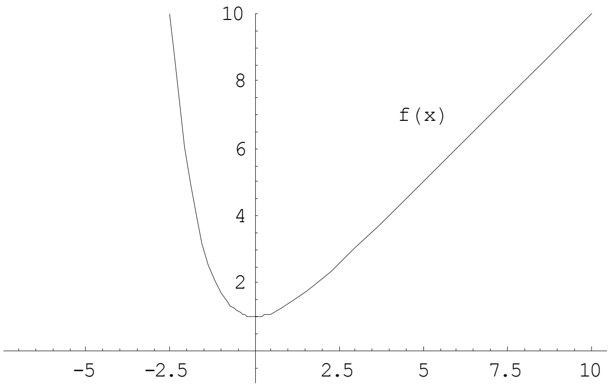
Como $m=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x.e^{+x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(1-x.e^{+x}\right)=(1-\infty.\infty)=-\infty$, y

$$n=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x+\frac{1}{e^{+x}}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^{-x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^{+x}\right)=\infty$$

f(x) **no tiene asíntotas oblicuas en - ∞**

d)

Un esbozo de la gráfica es



Ejercicio 2

Sea $f:R \to R$ y $g:R \to R$ las funciones definidas por $f(x)=x^2+|x|$ y $g(x)=2$

a) [1 punto] Determina los puntos de corte de las graficas de ***f*** y ***g***. Esboza dichas gráficas.
b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por dichas graficas

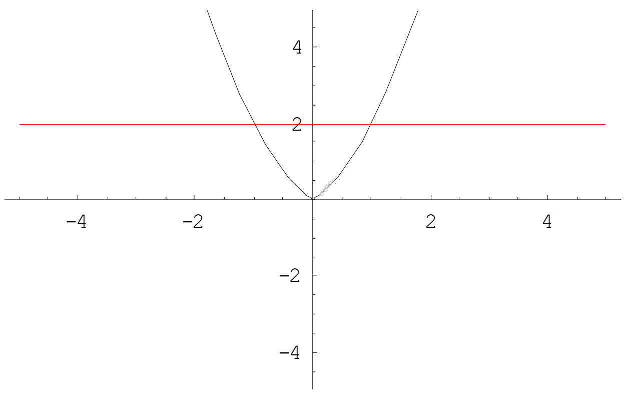
Solución

a)

$$f(x)=x^2+|x|=\begin{cases} x^2-x & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+x & \text{si} \quad x\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x=2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow \Delta=1+8=9 \\ x^2+x=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow \Delta=1+8=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \text{Si } x<0,\ x=\dfrac{1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow \left\{ x=\dfrac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1+3}{2}=2>0 \Rightarrow \text{No está en el intervalo estudiado} \\ x=\dfrac{1-3}{2}=-1<0 \Rightarrow f(-1)=(-1)^2-(-1)=2 \Rightarrow (-1,2) \end{cases} \right. \\ \text{Si } x\geq 0,\ x=\dfrac{-1\pm\sqrt{9}}{2} \Rightarrow \left\{ x=\dfrac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{-1+3}{2}=1>0 \Rightarrow f(1)=1^2+1=2 \Rightarrow (1,2) \\ x=\dfrac{1-3}{2}=-1<0 \Rightarrow \text{No está en el intervalo estudiado} \end{cases} \right. \end{cases}$$

Ambas ramas son parábolas
Si x<0, la abscisa del vértice es f'(x)=0; 2x-1=0, de donde x=1/2
Si x≥0, la abscisa del vértice es f'(x)=0; 2x+1=0, de donde x= -1/2
Un esbozo de las gráficas es



b)

$$A=2\left[\int_0^1 2\,dx-\int_0^1 (x^2+x)\,dx\right]=4.[x]_0^1-2.\frac{1}{3}.[x^3]_0^1-2.\frac{1}{2}.[x^2]_0^1=4.(1-0)-\frac{2}{3}.(1^3-0^3)-(1^2-0^2)$$

$$A=4-\frac{2}{3}-1=\frac{7}{3}\,u^2$$

Ejercicio 3

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=A-kI$, donde ***k*** es una constante e ***I*** la matriz identidad de orden **2**

a) [0'75 puntos] Determina los valores de ***k*** para los que ***B*** no tiene inversa
b) [0'5 puntos] Calcula $\mathbf{B^{-1}}$ para $\mathbf{k = -1}$
c) [1'25 puntos] Determina la constantes α y β para las que se cumple $A^2+\alpha A=\beta I$

Solución

a)

$$B=\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}k&0\\0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3-k&1\\2&-1-k\end{pmatrix}\Rightarrow \exists B^{-1}(\exists \text{ significa" existe al menos"})\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-3-k&1\\2&-1-k\end{vmatrix}=(-1)\cdot(3+k)\cdot(-1)\cdot(1+k)-2=(3+k)\cdot(1+k)-2=3+3k+k+k^2-2=k^2+4k+1$$

$$\text{Si } |B|=0\Rightarrow k^2+4k+1=0\Rightarrow \Delta=16-4=12>0\Rightarrow k=\frac{-4\pm\sqrt{12}}{2}\Rightarrow \begin{cases}k=\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=-2+\sqrt{3}\\ k=\dfrac{-4-2\sqrt{3}}{2}=-2-\sqrt{3}\end{cases}$$

$$\forall x\in R-\left\{-2-\sqrt{3}\,,-2+\sqrt{3}\right\}\Rightarrow |B|\neq 0\Rightarrow \text{Existe } B^{-1}$$

b)

$$|B|=(-1)^2+4\cdot(-1)+1=1-4+1=-2\neq 0\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{|B|}\cdot\left(\operatorname{adj}B^t\right)\Rightarrow B=\begin{pmatrix}-2&1\\2&0\end{pmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{pmatrix}-2&2\\1&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\operatorname{adj}B^t=\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix}\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{(-2)}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\-2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{2}\\1&1\end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{cases}A^2+\alpha A=\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}+\alpha\cdot\begin{pmatrix}-3&1\\2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11&-4\\-8&3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\alpha&\alpha\\2\alpha&-\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}11-3\alpha&-4+\alpha\\-8+2\alpha&3-\alpha\end{pmatrix}\\ \beta I=\beta\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta&0\\0&\beta\end{pmatrix}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\begin{cases}11-3\alpha=\beta\\ -4+\alpha=0\Rightarrow \alpha=4\\ -8+2\alpha=0\Rightarrow 2\alpha=8\Rightarrow \alpha=4\\ 3-\alpha=\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}11-3\times 4=\beta\Rightarrow \beta=-1\\ 3-4=\beta\Rightarrow \beta=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=4\\ \beta=-1\end{cases}$$

Ejercicio 4

Sea la recta ***r*** definida por $\begin{cases}x-y=-2\\x-z=-3\end{cases}$ y la recta ***s*** definida por $\begin{cases}x=1\\2y-z=-2\end{cases}$

a) [1 punto] Estudia la posición relativa de ***r*** y ***s***
b) [1'5 puntos] Halla la ecuación del plano que contiene a ***s*** y es paralelo a ***s***

Solución

a) Se estudiará, primeramente, si son paralelas analizando si hay proporcionalidad entre sus vectores directores, de ser así veremos si tienen un punto común y si ello se cumple la recta será coincidente. En el caso de que no exista la proporcionalidad se estudiará si tienen un punto común y si no se cortan son rectas que se cruzan.

$$\begin{cases}\begin{cases}y=2+x\\z=3+x\end{cases}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=\lambda\\y=2+\lambda\\z=3+\lambda\end{cases}\Rightarrow v_r=(1,1,1)\\ z=2+2y\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=1\\y=\mu\\z=2+2\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}v_s=(0,1,2)\\S(1,0,2)\end{cases}\end{cases}\Rightarrow \frac{1}{0}\neq\frac{1}{1}\Rightarrow \text{No son coincidentes ni paralelas}\Rightarrow$$

$$\text{Punto común}\Rightarrow\begin{cases}\lambda=1\\2+\lambda=\mu\\3+\lambda=2+2\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2+1=\mu\Rightarrow \mu=3\\3+1=2+2\mu\Rightarrow 2\mu=2\Rightarrow \mu=1\end{cases}\Rightarrow \text{No se cortan}$$

Las rectas r y s se cruzan

b) Es un plano π generado por el vector director de ***s***, por el de ***r*** y por un punto ***S*** de la recta ***s*** y el punto genérico ***G*** del plano

$$\begin{cases} v_r=(1,1,1) \\ v_s=(0,1,2) \\ SG=(x,y,z)-(1,0,2)=(x-1,y,z-2) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

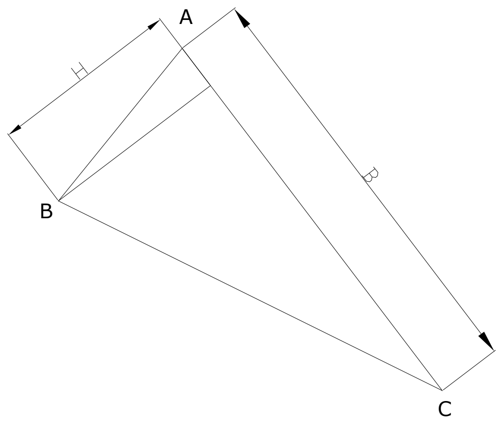
$$2.(x-1)+(z-2)-(x-1)-2y=0 \Rightarrow (x-1)-2y+(z-2)=0 \Rightarrow \pi \equiv x-2y+z-3=0$$

Opción B

Ejercicio 1

[2'5 puntos] De todos los triángulos cuya base y altura suman **20 cm.,** ¿qué base tiene el de área máxima?.

Solución



$$\begin{cases} B+H=20 \Rightarrow H=20-B \\ A=\dfrac{1}{2}.B.H \end{cases} \Rightarrow A=\frac{1}{2}\times B\times(20-B)=\frac{1}{2}\times\left(20\times B-B^2\right) \Rightarrow A'=\frac{dA}{dB}=\frac{1}{2}.(20-2B) \Rightarrow$$

$$A'=0 \Rightarrow 20-2B=0 \Rightarrow 2B=20 \Rightarrow B=10 \Rightarrow A'=\frac{dA}{dB}=\frac{1}{2}.(-2)=-1<0 \Rightarrow \text{Máximo} \Rightarrow$$

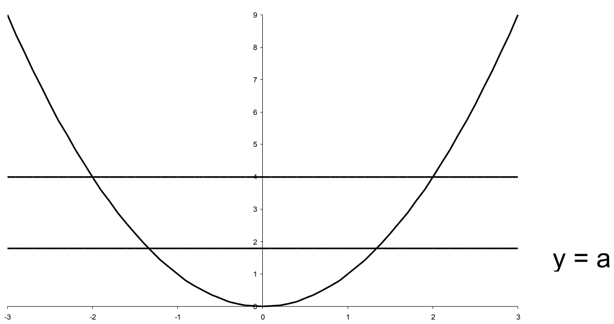
$$\begin{cases} B=10 \text{ cm.} \\ H=20-10=10 \text{ cm} \end{cases}$$

Ejercicio 2

[2'5 puntos] Calcula un número positivo ***a***, menor que ***4***, para que el recinto limitado por la parábola de ecuación ***y = x²*** y las dos rectas de ecuaciones ***y = 4*** y ***y = a***, tenga un área de $\frac{28}{3}$ unidades cuadradas.

Solución

$$\begin{cases} x^2=4 \Rightarrow x=\pm\sqrt{4} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2 \end{cases} \\ x^2=a \Rightarrow x=\pm\sqrt{a} \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{a} \\ x=-\sqrt{a} \end{cases} \end{cases}$$



$$\frac{28}{3}=2\left[\int_0^2 4\,dx-\int_0^{\sqrt{a}} a\,dx-\int_{\sqrt{a}}^2 x^2\,dx\right] \Rightarrow \frac{14}{3}=4\int_0^2 dx-a\int_0^{\sqrt{a}} dx-\int_{\sqrt{a}}^2 x^2\,dx \Rightarrow$$

$$\frac{14}{3}=4\times[x]_0^2-a\times[x]_0^{\sqrt{a}}-\frac{1}{3}\left[x^3\right]_{\sqrt{a}}^2 \Rightarrow \frac{14}{3}=4.(2-0)-a.(\sqrt{a}-0)-\frac{1}{3}\left[2^3-\left(\sqrt{a}\right)^3\right] \Rightarrow$$

$$\frac{14}{3}=8-a.\sqrt{a}-\frac{8}{3}+\frac{a.\sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{14}{3}=\frac{24-8}{3}-\frac{2.a.\sqrt{a}}{3} \Rightarrow \frac{14}{3}=\frac{16}{3}-\frac{2.a.\sqrt{a}}{3} \Rightarrow -\frac{2}{3}=-\frac{2.a.\sqrt{a}}{3} \Rightarrow$$

$$a.\sqrt{a}=1 \Rightarrow \left(a.\sqrt{a}\right)^2=1^2 \Rightarrow a^2.a=1 \Rightarrow a^3=1 \Rightarrow a=\sqrt[3]{1}=1$$

Ejercicio 3

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+y=m+1 \\ x+my+z=1 \\ mx+y-z=m \end{cases}$

a) [1’5 puntos] Determina los valores de ***m*** para los que el sistema es compatible
b) [1 punto] Resuelve el sistema en el caso **m = -1**

Solución

a)

Matriz de los coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{pmatrix}$; matriz ampliada $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & m+1 \\ 1 & m & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & m \end{pmatrix}$

Como $|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & -1 \end{vmatrix}$ = {Adjuntos 1ª fila} = 1(-m-1)-1(-1-m) = 0, rango(A) < 3 sea cual sea m de R.

En A utilizando las columnas 2 y 3 como $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ m & 1 \end{vmatrix}$ = 1 ≠ 0, rango(A) = 2, sea cual sea “m” de R.

En A^*, utilizando la columna 2, 3 (columnas con las que he formado el menor ≠ 0 de la matriz A) y la de los términos independientes tenemos que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}$ tiene que ser 0, para que rango(A^*) = 2 y el sistema sea compatible.

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & m+1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & -1 & m \end{vmatrix}$ = {Adjuntos 1ª fila} = 1(m+1)+(m+1)(-1-m) = $-m^2 - m = 0$

Resolviendo $-m^2 - m = 0$, obtenemos m = -1 y m = 0, por tanto el sistema es compatible si y solo si **m = 0** y **m = -1**

b)

Lo resolvemos para m = -1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow -2y+z=1 \Rightarrow z=1+2y \Rightarrow x+y=0 \Rightarrow$$

$$x=-y \Rightarrow Solución\,(-\lambda\,,\lambda\,,1+2\lambda)$$

Ejercicio 4

Sea el punto ***P(2 , 3 , -1)*** y la recta ***r*** definida por $\begin{cases} x+y+2z=1 \\ x-2y-4z=1 \end{cases}$

a) [1’25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por **P** y contiene ***r***
b) [1’25 puntos] Halla el punto de ***r*** que está más cerca de ***P***

Solución

a) Podremos hallar un haz de planos determinados por la recta ***r*** y calcularemos el que contenga a punto **P** que es el plano π pedido

Haz de planos $\Rightarrow$ $x+y+2z-1+\lambda\left(x-2y-4z-1\right)=0 \Rightarrow$

$2+3+2.\left(-1\right)-1+\lambda.\left(2-2.3-4.\left(-1\right)-1\right)=0 \Rightarrow 5-2-1+\lambda.\left(2-6+4-1\right)=0 \Rightarrow 2-\lambda=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow$

$x+y+2z-1+2.\left(x-2y-4z-1\right)=0 \Rightarrow 3x-3y-6z-3=0 \Rightarrow \pi \equiv x-y-2z-1=0$

b) Es el punto ***R*** de mínima distancia entre ***P*** y ***r***, para ello por ***P*** hallaremos un plano perpendicular a ***r***, que tendrá como vector director el de esta recta que es perpendicular al vector formado por ***P*** y el punto ***G*** que genera el plano y el producto escalar de estos dos es nulo. Hallaremos, después el punto de corte del plano y la recta

$$\begin{cases} x+y+2z=1 \\ -x+2y+4z=-1 \end{cases} \Rightarrow 3y+6z=0 \Rightarrow y+2z=0 \Rightarrow y=-2z \Rightarrow x-2z+2z=1 \Rightarrow x=1 \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \Rightarrow \overrightarrow{v_r}=\left(0,-2,1\right) \\ z=\lambda \end{cases} \\ \overrightarrow{PG}=\left(x,y,z\right)-\left(2,3,-1\right)=\left(x-2,y-3,z+1\right) \end{array} \right. \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \bullet \overrightarrow{PG}=0 \Rightarrow$$

$$\left(0,-2,1\right)\bullet\left(x-2,y-3,z+1\right)=0 \Rightarrow -2.\left(y-3\right)+z+1=0 \Rightarrow -2y+6+z+1=0 \Rightarrow \pi \equiv 2y-z-7=0$$

$$2.\left(-2\lambda\right)-\lambda-7=0 \Rightarrow -4\lambda-\lambda-7=0 \Rightarrow -5\lambda-7=0 \Rightarrow -5\lambda=7 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{5}$$

$$R \begin{cases} x=1 \\ y=-2.\left(-\frac{7}{5}\right)=\frac{14}{5} \Rightarrow R\left(1,\frac{14}{5},-\frac{7}{5}\right) \\ z=-\frac{7}{5} \end{cases}$$