Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)= ax^3 + bx^2 +cx$, determina a, b y c sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1,0), y que la recta tangente en ese punto tiene por ecuación $y = -3x + 3$.

Solución

$f(x)= ax^3 + bx^2 +cx$. Función polinómica, por tanto continua y derivable en todo R.
$f'(x)= 3ax^2 + 2bx +c$,
$f''(x)= 6ax + 2b$,
Si tiene un punto de inflexión en (1,0), sabemos que f(1) = 0 (por punto) y f''(1) = 0, por ser punto de inflexión.
Como la recta tangente en x = 1 es y = −3x + 3, sabemos que su pendiente es f'(1) = -3 = y' (de la recta).
De f''(1) = 0, tenemos 0 = 6a + 2b, luego **b = -3a**.
De f'(1) = -3, tenemos -3 = 3a + 2b + c = 3a – 6a + c = -3a + c, luego **c = 3a – 3**.
De f(1) = 0, tenemos 0 = a + b + c = a – 3a + 3a - 3 = a - 3, luego **a = 3**, **b = -9** y **c = 6**.

Ejercicio 2 opción A, modelo 3 del 2011

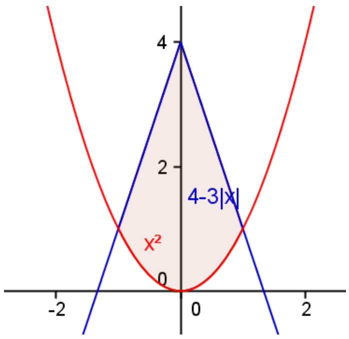
Sean $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ las funciones definidas por: $f(x) = 4 - 3|x|$ y $g(x) = x^2$.
(a) [1 punto] Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte.
(b) [1'5 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.

Solución

(a)
Esboza las gráficas de f y g. Determina sus puntos de corte

Sabemos que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Por tanto $f(x) = 4 - 3|x| = \begin{cases} 4 + 3x & \text{si } x < 0 \\ 4 - 3x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

Su gráfica está formada por dos rectas (con dos valores es suficiente para dibujarlas) y coinciden en x = 0, puesto que la función f es continua por suma y compuesta de continuas.
La gráfica de x^2 es el de una parábola von las ramas hacia arriba (∪) y vértice en (0,0).
Un esbozo de sus gráficas es



Vamos a calcular sus **puntos de corte**, para ello observamos que son simétricas respecto al eje OY, luego sólo calculamos el corte para x > 0, y cambiando el signo tenemos el punto para x < 0.

Para x > 0, tenemos $x^2 = 4 – 3x$, es decir $x^2 + 3x – 4 = 0$. $x = \dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2}$, de donde x = 1 y x = -4. Como sólo nos interés la solución positiva tenemos **x = 1**, y por simetría la otra es **x = -1**.
(b)
Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g.
Por simetría (la calculamos para x > 0) el área pedida es

Área = $2.\int_0^1 (4-3x-x^2)dx = 2.[4x – 3x^2/2 – x^3/3]_0^1 = 2.(4 – 3/2 – 1/3) = 2.(13/6) = 13/3$ u.a. $\cong$ 4'33 u.a.

Ejercicio 3 opción A, modelo 3 del 2011

Sean A y B dos matrices que verifican:

$$A + B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A - B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(a) [1 punto] Halla las matrices $(A + B)(A - B)$ y $A^2 - B^2$.
(b) [1'5 puntos] Resuelve la ecuación matricial $XA - XB - (A + B)^t = 2I$, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de A + B.

Solución

(a) Halla las matrices (A + B)(A − B) y $A^2 - B^2$

(A+B)(A-B) = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 20 \\ 4 & 16 \end{pmatrix}$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo tanto (A+B)(A-B) no coincide con A^2-B^2, por lo tanto para calcular A^2-B^2, tenemos que calcular A, B y sus cuadrados y después restar.

(A+B)+(A-B) = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ = 2A, de donde A = (1/2).$\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

A.A = $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

(A+B)-(A-B) = $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ = 2B, de donde B = (1/2). $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

B.B = $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 12 & 15 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 16 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$

(b)

Resuelve la ecuación matricial XA − XB − $(A + B)^t$ =2I, siendo I la matriz identidad de orden 2 y $(A + B)^t$ la matriz traspuesta de A + B.

De XA − XB − $(A + B)^t$ =2I, tenemos X.(A – B) = $(A + B)^t$ + 2I, es decir X. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}^t + 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto X. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Como el determinante de $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ es det$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ = 4 + 4 = 8 $\neq$ 0, la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ tiene inversa, y podemos multiplicar por la derecha la expresión X.$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ por la inversa $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$, quedándonos

X = $\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.(1/8). $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ = (1/8). $\begin{pmatrix} 15 & -18 \\ 8 & 0 \end{pmatrix}$

La matriz inversa es $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$ = (1/8).Adj$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{t}$ = (1/8).Adj$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ = (1/8). $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 4 opción A, modelo 3 del 2011

Sea el punto P(2,3,−1) y la recta r dada por las ecuaciones $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

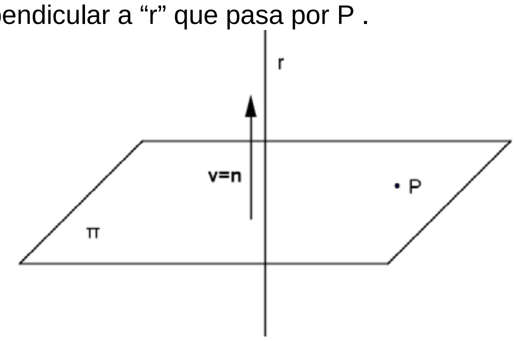
(a) [1 punto] Halla la ecuación del plano perpendicular a "r" que pasa por P .

(b) [1'5 puntos] Calcula la distancia del punto P a la recta "r" y determina el punto simétrico de P respecto de r.

Solución

(a)

Halla la ecuación del plano perpendicular a "r" que pasa por P .



El plano π tiene como vector normal **n** uno director de la recta **v**, luego **n** = (0,-2,1). Como el plano pasa por

el punto P(2,3,−1), el plano π tiene de ecuación **n•(x-p)** = 0, siendo "•" es producto escalar.
n•(x-p) = 0 = (0,-2,1)• (x-2,y-3,z+1) = -2y+6+z+1 = **-2y+z+7 = 0** $\equiv \pi$
(b)
Calcula la distancia del punto P a la recta "r" y determina el punto simétrico de P respecto de r.
Para calcular la distancia del punto P a la recta "r", determinamos la intersección Q de "r" con "π".
(sustituimos r en π, determinamos λ, y obtenemos Q).
d(P, π) d(PQ) = ||**PQ**||, donde || || es el módulo del vector.
El simétrico de P respecto de r, es el simétrico de P respecto de Q, por la construcción que hemos realizado.
-2(-2λ)+(λ)+7 = 0 = 5λ + 7, de donde λ = -7/5, y Q(1,-2(-7/5),-7/5) = Q(1,14/5,-7/5).
d(P, π) d(PQ) = ||**PQ**|| = $\sqrt{(1)^2 + (1/5)^2 + (2/5)^2} = \sqrt{6/5}$ u.l.
PQ = (1-2, 14/5-3,-7/5+1) = (-1, -1/5, -2/5)

Q es el punto medio del segmento PP', siendo P' el simétrico buscado.
(1,14/5,-7/5) = ((x+2)/2,(y+3)/2,(z−1)/2).
De 1 = (x+2)/2, tenemos x = 0
De 14/5 = (y+3)/2, tenemos y = 28/5 – 3 =13/5
De -7/5) = (z−1)/2, tenemos z = -14/5 + 1 = -9/5
El simétrico buscado es P'(0, 13/5, -9/5).

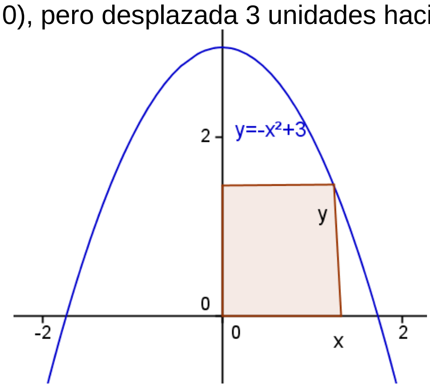
Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] En el primer cuadrante representamos un rectángulo de tal manera que tiene un vértice en el origen de coordenadas y el vértice opuesto en la parábola $y = -x^2 + 3$. Determina las dimensiones del rectángulo para que su área sea máxima.

Solución

Es un problema de optimización.
Un pequeño esbozo de la gráfica nos ayudará. Y = $-x^2$+ 3 es una parábola exactamente igual que"$-x^2$" (ramas hacia abajo $\cap$, vértice en (0,0), pero desplazada 3 unidades hacia arriba en ordenadas OY.



Función a optimizar Área = x.y
Relación entre las variables y = $-x^2$+ 3.
Función a optimizar A(x) = x.($-x^2$+ 3) = $-x^3 + 3x$.

Recordamos que si A'(a) = 0 y A''(a) < 0, en x = a hay un máximo relativo.
A(x) = $-x^3 + 3x$.
A'(x) = $-3x^2 + 3$. De A'(x) = 0, tenemos $-3x^2 + 3 = 0$, de donde $x^2 = 1$ y sus soluciones son x = $\pm$ 1. Como estamos en la parte positiva la única solución válida es x = 1, que será el posible máximo.
A'(x) = $-3x^2 + 3$
A''(x) = -6x.
Como A''(1) = -6 < 0, x = 1 es un máximo.
Las **dimensiones del rectángulo** pedido son **x = 1** e **y =** $-(1)^2 + 3$ = **2**

Ejercicio 2 opción B, modelo 3 del 2011

Calcula: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos(x)dx$

Solución

Calculamos primero la integral indefinida, $\int$ x.cos(x).dx, que es una integral por partes ($\int$u.dv = u.v - $\int$v.du)

Tomamos u = x de donde du = dx, y dv = cos(x).dx de donde v = ∫ cos(x).dx = sen(x), luego nos resulta

∫ x.cos(x).dx = x.sen(x) - ∫sen(x).dx = x.sen(x) + cos(x).
La integral definida pedida es

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x.\cos(x)dx = [x.\text{sen}(x) + \cos(x)\ ]_0^{\pi/2} = (\ (\pi/2).\text{sen}(\pi/2) + \cos(\pi/2)\ ) - (\ (0.\text{sen}(0) + \cos(0)\ ) = \pi/2 - 1.$

Ejercicio 3 opción B, modelo 3 del 2011

Sea la matriz A = $\begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(a) [1 punto] Determina los valores de λ para los que la matriz A − 2I tiene inversa, siendo **I** la matriz identidad de orden 3.
(b) [1'5 puntos] Para λ = −2, resuelve la ecuación matricial AX = 2X + I.

Solución

(a)
Determina los valores de λ para los que la matriz A − $2I_3$ tiene inversa, siendo I la matriz identidad de orden 3.
La matriz A − $2I_3$ tiene inversa si su determinante (| A − $2I_3$|) es distinto de cero.

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda & -5 \\ \lambda & 0 & 3 \end{pmatrix} - 2.\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos el determinante desarrollando por el adjunto de la segunda columna.

$$|A - 2I_3| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-2)(1-\lambda^2).$$

| A − $2I_3$| ≠ 0 si $(\lambda-2)(1-\lambda^2) \neq 0$, es decir $(\lambda-2) \neq 0$ y también $(1-\lambda^2) \neq 0$, es decir $\lambda \neq 2$ y $\lambda \neq \pm 1$.

La matriz A − $2I_3$ tiene inversa si **λ ≠ 2** y **λ ≠ ± 1**

(b)
Para λ = −2, resuelve la ecuación matricial AX = 2X + **I**.
De AX = 2X + I, tenemos AX - 2X = I, es decir (A – $2.I_3$).X = I.
Como para λ = −2, la matriz (A – $2.I_3$) tiene inversa, podemos multiplicar por la izquierda por la inversa, y obtenemos:
$(A - 2.I_3)^{-1}.(A - 2.I_3).X = (A - 2.I_3)^{-1}.I$, de donde **X =** $(A - 2.I_3)^{-1}.I$ = $\mathbf{(A - 2.I_3)^{-1}}$.
Calculamos ya $(A - 2.I_3)^{-1} = (1 /|\ A - 2.I_3|\ ).\text{Adj}(A - 2.I_3)^t$.

Como | A − $2I_3$| = $(\lambda-2)(1-\lambda^2)$, para λ = −2, tenemos | A − $2I_3$| = $(-2 - 2)(1 - (-2)^2) = 12$.

Como $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda \\ -5 & \lambda-2 & -5 \\ \lambda & 0 & 1 \end{pmatrix}$, para λ = −2, tenemos $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -5 & -4 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$(A - 2I_3)^t = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -4 & 0 \\ -2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$; $\text{Adj}(A - 2I_3)^t = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$; $(A - 2.I_3)^{-1} = (1/12).\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$, luego la matriz pedida es **X =** $\mathbf{(A - 2.I_3)^{-1}}$ $= (1/12).\begin{pmatrix} -4 & 0 & -8 \\ 15 & -3 & 15 \\ -8 & 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo 3 del 2011

[2'5 puntos] Considera los planos π_1 y π_2 dados respectivamente por las ecuaciones

$$(x,y,z) = (-2,0,7) + \lambda(1,-2,0) + \mu(0,1,-1) \quad \text{y} \quad 2x + y - z + 5 = 0$$

Determina los puntos de la recta "r" definida por $x = y + 1 = (z - 1)/(-3)$ que equidistan de π_1 y π_2.

Solución

Ponemos el plano π_1 en su forma general det(**x-a,u,v**) = 0, donde **a** = ((−2,0,7), **u** = (1,−2,0) y **v** = (0,1,−1).

$$\pi_1 \equiv \det(\mathbf{x-a,u,v}) = 0 = \begin{vmatrix} x+2 & y & z-7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = (x+2)(2) - y(-1) + (z-7)(1) = 2x + y + z - 3 = 0.$$

Sabemos que la distancia de un punto $P(p_1, p_2, p_3)$ a un plano $\pi \equiv ax+by+cz+d = 0$ es

$d(P, \pi) = \dfrac{|a(p_1)+b(p_2)+c(p_3)+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, donde | | es el valor absoluto.

Ponemos la recta "r" en forma vectorial, para lo cual necesitamos un punto suyo, el B y un vector director, el **w**.

Como "r" $\equiv x = y + 1 = (z - 1)/(-3)$, un punto de la recta es el B(0,-1,1) y un vector director es **w** = (1,1-3).

La recta en forma vectorial es "r" $\equiv (x, y, z) = (0+\delta,-1+\delta,1-3\delta)$, con δ un número real cualquiera.

Un punto genérico de la recta "r" es $X = (\delta,-1+\delta,1-3\delta)$.

Como me piden los puntos de "r" que equidistan de π_1 y π_2, tengo que resolver la ecuación:

$d(X, \pi_1) = d(X, \pi_2)$, con X punto genérico de "r".

Recuerdo que $\pi_1 \equiv 2x + y + z - 3 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x + y - z + 5 = 0$ y $X = (\delta,-1+\delta,1-3\delta)$.

$$d(X, \pi_1) = \frac{|2(\delta) + (-1+\delta) + (1-3\delta) - 3|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6}} = \frac{3}{\sqrt{6}}$$

$$d(X, \pi_2) = \frac{|2(\delta) + (-1+\delta) -(1-3\delta) + 5|}{\sqrt{2^2+1^2+1^2}} = \frac{|6(\delta) + 3|}{\sqrt{6}}$$

Igualando tenemos $\dfrac{|6(\delta) + 3|}{\sqrt{6}} = \dfrac{3}{\sqrt{6}}$, es decir $|6\delta + 3| = 3$, de donde salen dos ecuaciones:

$+(6\delta + 3) = 3$, de donde $\delta = 0$, y **uno de los puntos es** $X_1((0),-1+(0),1-3(0))$ = $\mathbf{X_1(0,-1,1)}$.

$-(6\delta + 3) = 3$, de donde $\delta = -1$, y **otro de los puntos es** $X_2((-1),-1+(-1),1-3(-1))$ = $\mathbf{X_2(-1,-2,4)}$.