

UNIVERSIDADES DE ANDALUCÍA PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD CURSO 2010-2011.
MATEMÁTICAS II

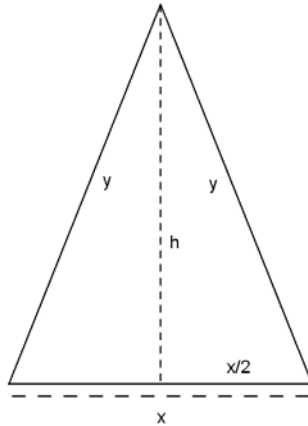
Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Septiembre 2011

[2'5 puntos] Calcula la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 8 y de área máxima.

Solución

Es un problema de optimización



Función a optimizar: Área = $(1/2)\text{base} \cdot \text{altura} = (1/2) \cdot x \cdot h$

Relación entre las variables: Perímetro = $8 = x + 2y$, de donde $y = 8/2 - x/2 = 4 - x/2$.

También tenemos en cuenta que tenemos dos triángulos rectángulos y podemos aplicar el Teorema de Pitágoras. $h^2 = y^2 - (x/2)^2 = (4 - x/2)^2 - (x/2)^2 = 16 - 4x + x^2/4 - x^2/4 = -4x + 16$, de donde como "h" es una longitud (es positiva) tenemos $h = \sqrt{-4x+16}$

$$A(x) = (1/2) \cdot x \cdot h = (1/2) \cdot x \cdot \sqrt{-4x+16}$$

Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $A(x)$.

$$A(x) = (1/2) \cdot x \cdot h = (1/2) \cdot x \cdot \sqrt{-4x+16}$$

$$A'(x) = (1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} + (1/2) \cdot x \cdot \frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}} = (1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$$

De $A'(x) = 0$, tenemos $(1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}} = 0$, es decir $(1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} = \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$, por tanto

$$(-4x+16) = 2x, \text{ luego } 6x = 16. \text{ "x"} = 16/6 = \text{"8/3"} \text{ y "y"} = 4 - (8/3)/2 = 4 - 4/3 = \text{"8/3"}.$$

Si nos damos cuenta es un triángulo equilátero.

Es decir **las dimensiones del triángulo son $x = 8/3$, $y = 8/3$ y su área es $(1/2) \cdot x \cdot \sqrt{-4x+16} = (1/2) \cdot (8/3)$.**

$$\sqrt{-4(8/3)+16} = (4/3). \sqrt{16/3} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \text{ u}^2.$$

Veamos para terminar que es un máximo, es decir $A''(8/3) < 0$

$$A'(x) = (1/2) \cdot \sqrt{-4x+16} - \frac{x}{\sqrt{-4x+16}}$$

$$A''(x) = \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}} - \frac{\sqrt{-4x+16} - x \cdot \frac{-4}{2\sqrt{-4x+16}}}{(\sqrt{-4x+16})^2} = \frac{-1}{\sqrt{-4x+16}} - \frac{\sqrt{-4x+16} + \frac{2x}{\sqrt{-4x+16}}}{-4x+16}, \text{ de donde}$$

$$A''(8/3) = \frac{-1}{\sqrt{16/3}} - \frac{\sqrt{16/3} + \frac{2(8/3)}{\sqrt{16/3}}}{16/3} < 0 \text{ (estamos sumando dos números negativos), luego es un máximo.}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo Septiembre 2011

Considera las funciones $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = 6x - x^2$ y $g(x) = x^2 - 2x$.

(a) [0'75 puntos] Esboza sus gráficas en unos mismos ejes coordenados y calcula sus puntos de corte.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Solución

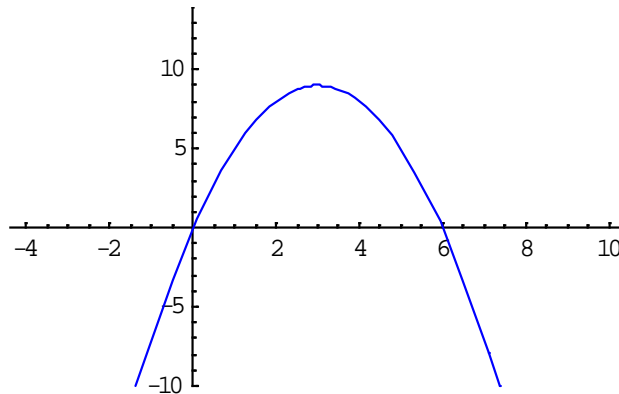
(a)

La gráfica de $f(x) = 6x - x^2$ ($a = -1, b = 6, c = 0$), es la de una parábola con las ramas hacia abajo ($a = -1 < 0$), abscisa del vértice en $x = -b/2a = -6/-2 = 3$, y ordenada en $f(3) = 6(3) - (3)^2 = 9$ [$V = (3,9)$]. Cortes con los ejes en:

Para $x = 0, f(0) = 6(0) - (0)^2 = 0$. Punto $(0,0)$, corte con OY.

Para $f(x) = 0, 6(x) - (x)^2 = 0 = x(6 - x)$, de donde $x = 0$ y $x = 6$. Puntos $(0,0)$ y $(6,0)$, corte con OX.

Un esbozo de su gráfica es

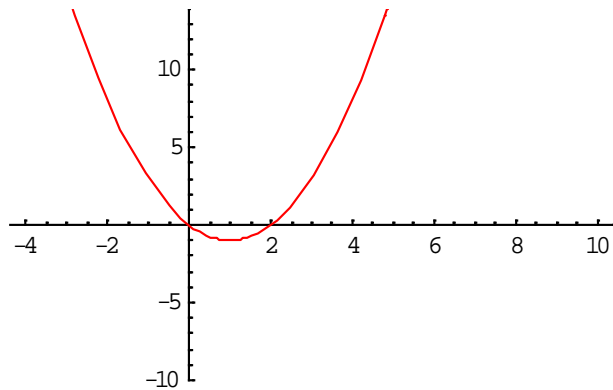


La gráfica de $g(x) = x^2 - 2x$ ($a = 1, b = -2, c = 0$), es la de una parábola con las ramas hacia arriba ($a = 1 > 0$), abscisa del vértice en $x = -b/2a = 2/2 = 1$, y ordenada en $f(1) = (1)^2 - 2(1) = -1$ [$V = (1,-1)$]. Cortes con los ejes en:

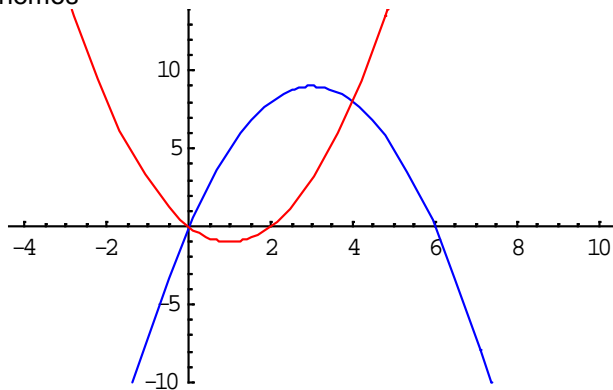
Para $x = 0, f(0) = (0)^2 - 2(0) = 0$. Punto $(0,0)$, corte con OY.

Para $f(x) = 0, (x)^2 - 2(x) = 0 = x(x - 2)$, de donde $x = 0$ y $x = 2$. Puntos $(0,0)$ y $(2,0)$, corte con OX.

Un esbozo de su gráfica es



Juntando ambas gráficas tenemos



Para calcular sus puntos de corte resolvemos la ecuación $f(x) = g(x)$, es decir $6x - x^2 = x^2 - 2x$.

De $6x - x^2 = x^2 - 2x$, tenemos $2x^2 - 8x = 0 = x(2x - 8)$, luego $x = 0$ y $x = 4$. Puntos $(0,0)$ y $(4,8)$.

(b)

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de f y g .

Observando las gráficas el área que me están pidiendo es:

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \int_0^4 (f(x) - g(x))dx = \int_0^4 ((6x - x^2) - (x^2 - 2x))dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)dx \left[\frac{-2x^3}{3} + 4x^2 \right]_0^4 = \\ &= \left(\frac{-2(4)^3}{3} + 4(4)^2 \right) - (0) = 64/3 \text{ u}^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 3 opción A, modelo Septiembre 2011

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- (a) [1'75 puntos] Calcula el rango de dependiendo de los valores de α .
 (b) [0'75 puntos] Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Solución

(a)

Calcula el rango de dependiendo de los valores de α .

Para estudiar el rango de A estudiamos su determinante $|A|$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ -1 & -1 & \alpha \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{fila} \end{array} = \begin{vmatrix} \alpha & 1 & -1 \\ 1 & \alpha & -1 \\ 0 & \alpha-1 & \alpha-1 \end{vmatrix} = (0) - (\alpha-1)(-\alpha+1) + (\alpha-1)(\alpha^2 - 1) =$$

$$= (\alpha-1)[(\alpha-1) + (\alpha-1)(\alpha+1)] = (\alpha-1) \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha+2).$$

Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2$, tenemos $|A| \neq 0$, por tanto $\text{rango}(A) = 3$.

Si $\alpha = 1$, tenemos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, y como $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 - F_1 \\ F_3 + F_1 \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, resulta que $\text{rango}(A) = 1$, pues

nos queda sólo un fila con elementos no nulos.

Si $\alpha = -2$, tenemos $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, y como $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 \neq 0$, luego $\text{rango}(A) = 2$.

(b)

Para $\alpha = 2$, resuelve la ecuación matricial $A \cdot X = B$.

Según el estudio del apartado (a), para $\alpha = 2$, $|A| = (2-1) \cdot (2-1) \cdot (2+2) = 4 \neq 0$ y existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$.

Multiplicando $A \cdot X = B$ por la izquierda por la inversa A^{-1} , tenemos $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$, de donde $I_2 \cdot X = A^{-1} \cdot B$, por tanto la matriz pedida es $X = A^{-1} \cdot B$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = A, \text{ pues es una matriz simétrica; } \text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \text{ por tanto la matriz}$$

$$\text{inversa es } A^{-1} = (1/4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Luego } X = A^{-1} \cdot B = (1/4) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (1/4) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 4 opción A, modelo Septiembre 2011

Considera los puntos $A(-1,k,3)$, $B(k+1,0,2)$, $C(1,2,0)$ y $D(2,0,1)$.

- (a) [1'25 puntos] ¿Existe algún valor de k para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes?
 (b) [1'25 puntos] Calcula los valores de k para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1.

Solución

(a)

¿Existe algún valor de k para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes?
 $A(-1,k,3)$, $B(k+1,0,2)$, $C(1,2,0)$ y $D(2,0,1)$.

Para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes, como son vectores de tres coordenadas, tenemos que ver que el determinante $\det(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD})$ sea 0.

$$\mathbf{AB} = (k+1-(-1), 0-k, 2-3) = (k+2, -k, -1)$$

$$\mathbf{BC} = (1-(k+1), 2-0, 0-2) = (-k, 2, -2)$$

$$\mathbf{CD} = (2-1, 0-2, 1-0) = (1, -2, 1)$$

$$\det(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -k & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{array}{l} C_2 - 2 \cdot C_1 \\ C_3 + C_1 \end{array} = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ -3k-4 & 2+2k & 0 \\ k+3 & -2-k & 0 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{tercera} \\ \text{columna} \end{array} = +(-1)(-3k-4)(-2-k) - (k+3)(2+2k) =$$

$$= - (6k+3k^2+8+4k - (2k+2k^2+6+6k)) = - (+2k+k^2+2) = -k^2 -2k -2.$$

Resolvemos $-k^2 -2k -2 = 0$, tenemos $k^2 + 2k + 2 = 0$. $k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2}$, que **no tiene solución real**.

Luego **no hay ningún valor de k**, para que los vectores **AB**, **BC**, y **CD** sean linealmente dependientes.
(b)

Calcula los valores de k para que los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1.

Sabemos que el volumen de un tetraedro es (1/6) del volumen del paralelepípedo que determinan tres vectores con el mismo origen, es decir (1/6) del valor absoluto del producto mixto de **AB**, **AC** y **AD** (lo indicaremos entre corchetes { }).

$$\text{Volumen} = 1 = (1/6) \cdot | \{ \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD} \} |$$

$$\mathbf{AB} = (k+1-(-1), 0-k, 2-3) = (k+2, -k, -1)$$

$$\mathbf{AC} = (1-(-1), 2-k, 0-3) = (2, 2-k, -3)$$

$$\mathbf{AD} = (2-(-1), 0-k, 1-3) = (3, -k, -2)$$

$$\{ \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD} \} = \det(\mathbf{AB}, \mathbf{BC}, \mathbf{CD}) = \begin{vmatrix} k+2 & -k & -1 \\ 2 & 2-k & -3 \\ 3 & -k & -2 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (k+2)(-4+2k-3k) - (-k)(5) + (-1)(-2k-6+3k) =$$

$$= (k+2)(-4-k) +5k+6-k = -4k -k^2 -8 -2k +4k + 6 = -k^2 -2k -2.$$

Resolvemos $1 = (1/6) \cdot | \{ \mathbf{AB}, \mathbf{AC}, \mathbf{AD} \} |$, luego $6 = | -k^2 -2k -2 |$, lo cual me da lugar a dos ecuaciones:

Primera: $-k^2 - 2k -2 = 6$; $k^2 + 2k + 8 = 0$; $k = \frac{-2 \pm \sqrt{4-32}}{2}$, que **no tiene solución real**.

Segunda: $-k^2 - 2k - 2 = -6$; $k^2 + 2k - 4 = 0$; $k = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{2} = -1 \pm \sqrt{5}$.

Los puntos A, B, C y D formen un tetraedro de volumen 1 si “k = -1-√5 ó k = -1+√5”

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Septiembre 2011

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$ para $x \neq 0$.

(a) [1'25 puntos] Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.

(b) [1'25 puntos] Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

(a)

Estudia las asíntotas de la gráfica de la función $f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$.

$x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{3x^4 + 1}{x^3} = [1/0^-] = -\infty$; la recta $x = 0$ es una A.V. de $f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x^4 + 1}{x^3} = [1/0^+] = +\infty$$

Como en la función que me han dado el grado del numerador es una unidad más que el grado del denominador, $f(x)$ tiene una asíntota oblicua (A.O.) de la forma $y = mx+n$ con $m = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x)/x]$ y $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx]$, y es la misma en $+\infty$ y en $-\infty$.

También se puede calcular la A.O. dividiendo numerador entre denominador y la A.O. es el cociente de la división entera.

Lo vamos a realizar por división

$3x^4 + 1$	x^3
$-3x^4$	$3x$
$0 + 1$	

La A.O. de $f(x)$ es $y = 3x$ en $\pm \infty$.

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - 3x] = 0^+$, $f(x)$ está por encima de la A.O. en $+\infty$ (le damos a x el valor $+100$)

Como $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - 3x] = 0^-$, $f(x)$ está por debajo de la A.O. en $-\infty$ (le damos a x el valor -100)

Si hay este caso A.O no hay asíntotas horizontales (A.H.)

(b)

Halla los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de $f'(x)$

$$f(x) = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{12x^3 \cdot x^3 - (3x^4 + 1) \cdot 3x^2}{(x^3)^2} = \frac{3x^2(4x^4 - 3x^4 - 1)}{x^6} = \frac{3x^2(x^4 - 1)}{x^6}$$

Si $f'(x) = 0$; $3x^2 \cdot (x^4 - 1) = 0$, de donde $x^2 = 0$ (no vale, porque $x = 0$ es A.V.) y $x^4 - 1 = 0$, de donde $x = \pm 1$.

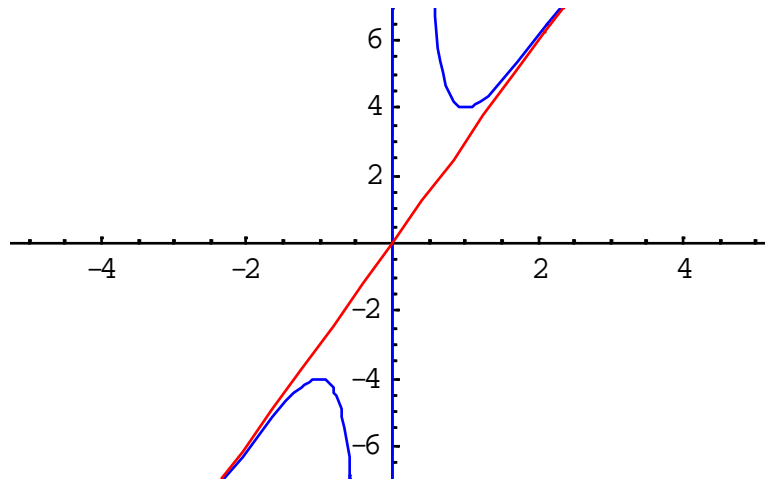
Como $f'(-2) = f'(2) = 180/(+) > 0$, $f'(x) > 0$ en $x < -1$ y $x > 1$, luego $f(x)$ es estrictamente creciente en $(-\infty, -1)$ y también en $(1, +\infty)$.

Como $f'(0'1) = (-0'0299)/(+) < 0$, $f'(x) < 0$ en $(-1, 1) - \{0\}$, luego $f(x)$ es estrictamente decreciente en $(-1, 1) - \{0\}$

Por definición en $x = -1$ hay un máximo relativo que vale $f(-1) = -4$.

Por definición en $x = +1$ hay un mínimo relativo que vale $f(1) = 4$.

Aunque no lo piden un esbozo de la gráfica es :



Ejercicio 2 opción B, modelo Septiembre 2011

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$.

(a) [0'75 puntos] Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -2$.

(b) [1'75 puntos] Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.

Solución

(a)

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ en el punto de abscisa $x = -2$.

Sabemos que la recta tangente de f en $x = -2$ es " $y - f(-2) = f'(-2) \cdot (x - (-2))$ "

$f(x) = -(1/4)x^2 + 4$, luego $f(-2) = -1 + 4 = 3$

$f'(x) = -x/2$, luego $f'(-2) = 1$, por **la recta tangente es** $y - 3 = 1 \cdot (x + 2)$. Operando sale **$y = x + 5$** .

(b)

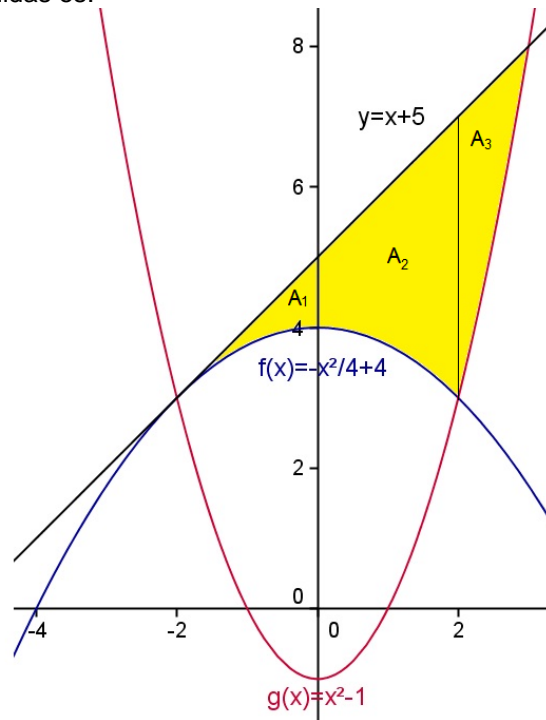
Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y la recta $y = x + 5$. Calcula el área de este recinto.

La gráfica de $f(x) = -(1/4)x^2 + 4$ ($a = -1/4, b = 0, c = 4$), es la de una parábola muy parecida a “ $-x^2$ ” (ramas hacia abajo y con vértice en $(0,0)$), pero un poco más abierta (al estar multiplicada por $1/4$) y desplazada “4” unidades hacia arriba en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en $(0,4)$.

La gráfica de $g(x) = x^2 - 1$ ($a = 1, b = 0, c = -1$), es la de una parábola igual que “ x^2 ” (ramas hacia arriba y con vértice en $(0,0)$), y desplazada “1” unidades hacia abajo en el eje OY, es decir el vértice lo tiene en $(0,-1)$.

La gráfica de $y = x + 5$, es la de una recta y con dos puntos es suficiente, para dibujarla. Hemos visto que era la recta tangente a f en $x = -2$.

Un esbozo de las gráficas pedidas es:



Donde me piden el área de la región en amarillo, que he dividido en tres áreas A_1, A_2 y A_3 .

Área pedida es $A = A_1 + A_2 + A_3$.

$A_1 + A_2 = \int_{-2}^b [(x+5) - (-\frac{x^2}{4} + 4)] dx$, donde “b” es el corte de $f(x) = -x^2/4 + 4$ con $g(x) = x^2 - 1$. (sólo solución positiva)

Igualando $-x^2/4 + 4 = x^2 - 1$, de donde $-x^2 + 16 = 4x^2 + 4$, es decir $5x^2 = 20$, luego $x = \pm 2$, y **b = 2**.

$$A_1 + A_2 = \int_{-2}^2 [(x+5) - (-\frac{x^2}{4} + 4)] dx = \int_{-2}^2 [\frac{x^2}{4} + x + 1] dx = \left[\frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + x \right]_{-2}^2 = (8/12 + 2 + 2) - (-8/12 + 2 - 2) = 16/3 \text{ u}^2.$$

$A_3 = \int_2^c [(x+5) - (x^2 - 1)] dx$, donde “c” es el corte de $y = x + 5$ con $g(x) = x^2 - 1$. (sólo solución mayor de 2).

Igualando $x + 5 = x^2 - 1$, de donde $x^2 - x - 6 = 0$, luego $x = -2$ y $x = 3$, por tanto **c = 3**.

$$A_3 = \int_2^3 [(x+5) - (x^2 - 1)] dx = \int_2^3 [-x^2 + x + 6] dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^3 = (-9 + 9/2 + 18) - (-8/3 + 2 + 12) = 13/6 \text{ u}^2.$$

El área pedida es $A = A_1 + A_2 + A_3 = 16/3 + 13/6 = 15/2 \text{ u}^2$.

Ejercicio 3 opción B, modelo Septiembre 2011

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) [1'25 puntos] Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $(1/12) \cdot A$.

(b) [1'25 puntos] Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Solución

(a)

Calcula los valores de α para los que la matriz inversa de A es $(1/12) \cdot A$.

Sabemos que existe la matriz inversa $A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t)$, si $\det(A) = |A| \neq 0$.

$$|A| = \begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha + \alpha = 4\alpha, \text{ luego } \alpha \neq 0. A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix}; A^t = \begin{pmatrix} \alpha & -\alpha \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \text{Adj}(A^t) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = (1/|A|) \cdot \text{Adj}(A^t) = (1/4\alpha) \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$$\text{Me dicen que } A^{-1} = (1/12) \cdot A, \text{ es decir } \begin{pmatrix} \frac{3}{4\alpha} & \frac{-1}{4\alpha} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha/12 & 1/12 \\ -\alpha/12 & 3/12 \end{pmatrix}$$

Igualando miembro a miembro tenemos:

De $3/4\alpha = \alpha/12$, tenemos $36 = 4\alpha^2$, de donde $\alpha^2 = 9$, y por tanto $\alpha = \pm 3$.

De $-1/4\alpha = 1/12$, tenemos $-12 = 4\alpha$, de donde $\alpha = -3$.

De $1/4 = -\alpha/12$, tenemos $12 = -4\alpha$, de donde $\alpha = -3$.

De $1/4 = 3/12$, tenemos $12 = 12$, lo cual es cierto.

El único valor de α que verifica todas las igualdades es $\alpha = -3$.

(b)

Para $\alpha = -3$, determina la matriz X que verifica la ecuación $A^t \cdot X = B$, siendo A^t la matriz traspuesta de A.

Sabemos por las propiedades de las matrices que $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

$$\text{Para } \alpha = -3, \text{ tenemos } A^{-1} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\alpha & 3 \end{pmatrix} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}, \text{ y por tanto } (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Multiplicando por la izquierda por $(A^t)^{-1}$ la expresión $A^t \cdot X = B$, tenemos $(A^t)^{-1} \cdot A^t \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot B$, de donde

$$\text{tenemos } I_2 \cdot X = (A^t)^{-1} \cdot B, \text{ es decir } X = (A^t)^{-1} \cdot B = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} = (1/12) \cdot \begin{pmatrix} -6 & 3 & 3 \\ -2 & 15 & 7 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción B, Septiembre 2011

Dado el plano π de ecuación $x + 2y - z = 0$ y la recta "r" de ecuaciones $\begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$

(a) [1'75 puntos] Halla el punto de intersección del plano π y la recta r.

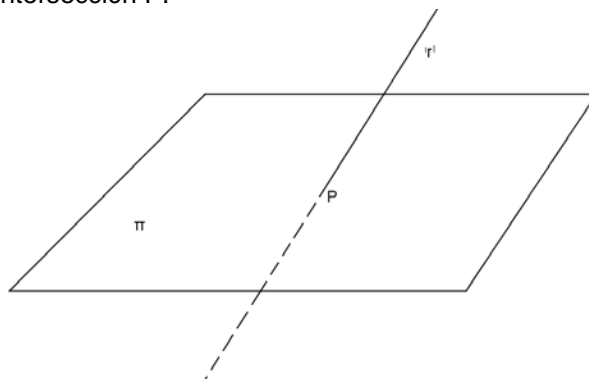
(b) [0'75 puntos] Halla el punto simétrico del punto Q(1,-2,3) respecto del plano π .

Solución

(a)

Halla el punto de intersección del plano $\pi \equiv x + 2y - z = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$

Ponemos la recta "r" en forma vectorial con un parámetro λ , la sustituimos en el plano π , obtenemos el valor de λ , y después el punto de intersección P.



De la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y = 5 \\ x + y - 4z = -13 \end{cases}$, poniendo $x = \lambda$, obtenemos $y = -5 + 3\lambda$. Entrando con ambos valores en la

2ª ecuación obtenemos $\lambda - 5 + 3\lambda - 4z = -13$, de donde $4\lambda + 8 = 4z$, luego $z = 2 + \lambda$.

La recta "r" en vectorial es $r \equiv (x, y, z) = (\lambda, -5+3\lambda, 2+\lambda)$

$\pi \equiv x + 2y - z = 0$

P es la intersección de "r" y " π ". Sustituimos "r" en " π " $\rightarrow (\lambda) + 2 \cdot (-5+3\lambda) - (2+\lambda) = 0$, de donde $6\lambda = 12$, por tanto $\lambda = 2$, y **el punto pedido es P(2, -5+3(2), 2+ (2)) = P(2,1,4).**

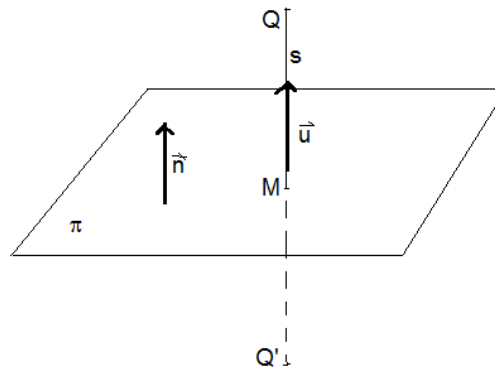
(b)

Halla el punto simétrico del punto Q(1,-2,3) respecto del plano π .

Calculamos la recta "s" perpendicular al plano " π " (Nos sirve como vector director de la recta **u** el vector normal del plano **n**), que pasa por el punto Q.

Calculamos el punto M intersección de la recta "s" con el plano " π ".

El punto M es el punto medio del segmento QQ', siendo Q' el punto simétrico buscado.



Calculamos la recta "s". Punto el Q(1,-2,3), vector director $\mathbf{u} = \mathbf{n} = (1,2,-1)$.

Ecuación de "s" en vectorial $s \equiv (x, y, z) = (1+\lambda, -2+2\lambda, 3-\lambda)$

Punto $M = r \cap \pi$ (punto de corte)

De $(1+\lambda) + 2(-2+2\lambda) - 4(3-\lambda) = 0$, obtenemos $6\lambda = 6$, de donde $\lambda = 1$, y el punto M es

$M(1+(1), -2+2(1), 3-(1)) = M(2, 0, 2)$

El punto M(2, 0, 2) es el punto medio del segmento QQ', es decir $(2, 0, 2) = ((1+x)/2, (-2+y)/2, (3+z)/2)$.

De $2 = (1+x)/2$, tenemos $x = 3$.

De $0 = (-2+y)/2$, tenemos $y = 2$.

De $2 = (3+z)/2$, tenemos $z = 1$

El punto simétrico pedido es Q'(x, y, z) = Q'(3,2,1).