

Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo Junio 2012 específico

Sea la función $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 1/x + \ln(x)$ donde \ln denota la función logaritmo neperiano.

(a) [1'75 puntos] Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $[1/e, e]$.

(b) [0'75 puntos] Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

Solución

(a)

Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan) en el intervalo $[1/e, e]$.

$f(x) = 1/x + \ln(x)$ está definida en $(0, +\infty)$, y en dicho intervalo es continua y derivable.

Sabemos los extremos absolutos de f se suelen encontrar en las soluciones de $f'(x) = 0$, los puntos donde no es continua o no es derivable (en nuestro caso no hay ninguno), o en los extremos del intervalo $[1/e, e]$, es decir $x = 1/e$ y $x = e$.

Veamos los puntos que anulan la 1ª derivada.

$$f(x) = 1/x + \ln(x)$$

$$f'(x) = -1/x^2 + 1/x$$

Si $f'(x) = 0$; tenemos $-1/x^2 + 1/x = 0$, de donde $1/x = 1/x^2$. Multiplicamos en cruz $\rightarrow x^2 = x$, pasamos todo a un miembro, $\rightarrow x^2 - x = 0 = x(x-1)$, de donde $x = 0$ y $x = 1$. $x = 0$ no sirve pues no está en el dominio, por tanto los extremos absolutos se encontrarán en las siguientes abscisas $x = 1/e$, $x = 1$ y $x = e$.

Sustituimos estos tres valores en $f(x)$, el resultado mayor corresponde al máximo absoluto y el menor al mínimo absoluto.

$$f(1/e) = 1/(1/e) + \ln(1/e) = e + \ln(1) - \ln(e) = e - 1 \cong 1'718$$

$$f(1) = 1/1 + \ln(1) = 1 + \ln(1) = 1$$

$$f(e) = 1/e + \ln(e) = 1/e + 1 \cong 1'368$$

El máximo absoluto es “ $e - 1$ ” y se alcanza en $x = 1/e$, y el mínimo absoluto es “1” y se alcanza en $x = 1$.

(b)

Determina la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

La ecuación de la recta tangente en $x = e$ es, “ $y - f(e) = f'(e) \cdot (x - e)$ ”

$$f(x) = 1/x + \ln(x) \quad \rightarrow f(e) = 1/e + \ln(e) = 1/e + 1$$

$$f'(x) = -1/x^2 + 1/x \quad \rightarrow f'(e) = -1/e^2 + 1/e$$

La recta tangente en $x = e$ es, “ $y - (1/e + 1) = (-1/e^2 + 1/e) \cdot (x - e)$ ”

Ejercicio 2 opción A, modelo Junio 2012 específico

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ respectivamente.

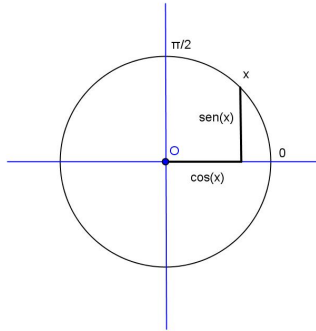
(a) [0'75 puntos] Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $[0, \pi/2]$.

(b) [1'75 puntos] Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x = \pi/2$.

Solución

Sean $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x) = \sin(x)$ y $g(x) = \cos(x)$ respectivamente.

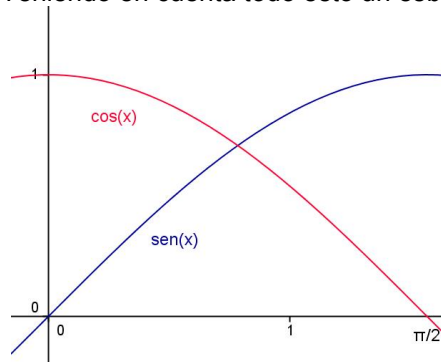
Sabemos que en la circunferencia goniométrica el *seno* es la *ordenada* y el *coseno* la *abscisa*. Véase la siguiente figura.



(a)

Realiza un esbozo de las gráficas de f y g en el intervalo $[0, \pi/2]$.

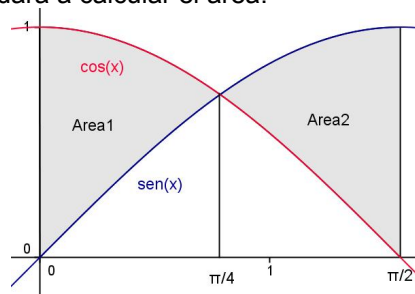
Sabemos que las funciones sen y cos son continuas y derivables en todo \mathbb{R} , periódicas de periodo 2π , $\text{sen}(0) = 0 = \text{cos}(\pi/2)$, $\text{sen}(\pi/2) = 1 = \text{cos}(0)$, que el sen y el cos van desfasados $\pi/2$, y que en $[0, \pi/2]$, sen es estrictamente creciente (es la ordenada) y cos es estrictamente decreciente (es la abscisa). Teniendo en cuenta todo esto un esbozo de sus gráficas es:



(b)

Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x = \pi/2$.

Un pequeño esbozo nos ayudará a calcular el área:



Como vemos el área pedida es $\text{Área} = \text{Área1} + \text{Área2}$.

Primero tenemos que ver donde coinciden $\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ en $[0, \pi/2]$, y vemos que es en " $\pi/4$ ", que es el punto medio del intervalo $[0, \pi/2]$, pues ahí coinciden la abscisa y la ordenada en la circunferencia goniométrica.

$$\begin{aligned} \text{Área} &= \text{Área1} + \text{Área2} = \int_0^{\pi/4} (\cos(x) - \text{sen}(x)) dx + \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\text{sen}(x) - \cos(x)) dx = \\ &= [\text{sen}(x) + \cos(x)]_0^{\pi/4} + [-\cos(x) - \text{sen}(x)]_{\pi/4}^{\pi/2} = [(\text{sen}(\pi/4) + \cos(\pi/4)) - (\text{sen}(0) + \cos(0))] + \\ &+ [(-\cos(\pi/2) - \text{sen}(\pi/2)) - (-\cos(\pi/4) - \text{sen}(\pi/4))] = (\sqrt{2}/2 + (\sqrt{2})/2 - 1 - 1 + (\sqrt{2})/2 + (\sqrt{2})/2 = \end{aligned}$$

$$= 2 \cdot (\sqrt{2}) - 2 \cong 0'828 u^2.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo Junio 2012 específico

[2'5 puntos] Considera las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C

Solución

Determina, si existe, la matriz X que verifica $AXB = C^t$, siendo C^t la matriz traspuesta de C

Veamos primero si tiene sentido el producto, observando filas y columnas

$$A_{3 \times 3} \cdot X_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 2} = C^t_{3 \times 2}, \text{ el producto tiene sentido si el orden de la matriz X es } 3 \times 2.$$

A continuación vamos a ver si las matrices A y B tienen matriz inversa, observando si sus determinantes son distinto de cero.

$$\det(B) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0, \text{ luego existe la matriz inversa } B^{-1}.$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0, \text{ luego existe la matriz inversa } A^{-1}.$$

Como existen las matrices inversas, podemos multiplicar la expresión " $AXB = C^t$ ", por la izquierda por la matriz A^{-1} y por la derecha por la matriz B^{-1} .

$$A^{-1} \cdot AXB \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} \rightarrow I_3 \cdot X \cdot I_2 = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} \rightarrow X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1}.$$

Vamos a calcular las inversas y a efectuar los productos de las matrices.

$$A^{-1} = (1 / |A|) \cdot \text{Adj}(A)^t.$$

$$\text{Como } A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \text{Adj}(A)^t = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = (1 / |B|) \cdot \text{Adj}(B)^t.$$

$$\text{Como } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{Adj}(B)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ de donde:}$$

$$X = A^{-1} \cdot C^t \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción A, modelo Junio 2012 específico

El punto M(1,-1,0) es el centro de un paralelogramo y A(2,1,-1) y B(0,-2,3) son dos vértices consecutivos del mismo.

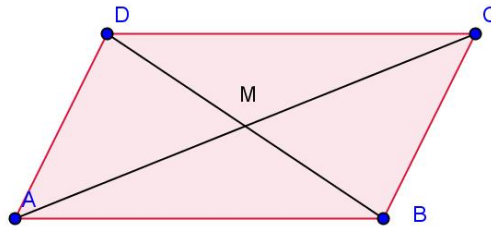
- (a) [1 punto] Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.
- (b) [1'5 puntos] Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Solución

El punto M(1,-1,0) es el centro de un paralelogramo y A(2,1,-1) y B(0,-2,3) son dos vértices consecutivos del mismo.

- (a) Halla la ecuación general del plano que contiene al paralelogramo.

Vamos a realizar un pequeño dibujo que nos servirá para los dos apartados.



$M(1,-1,0)$ es el centro de un paralelogramo y $A(2,1,-1)$ y $B(0,-2,3)$.

Para un plano necesitamos un punto, el M , y dos vectores independientes, el \mathbf{MA} y el \mathbf{MB} .

$\mathbf{MA} = (1,2,-1)$; $\mathbf{MB} = (-1,-1,3)$.

El plano del paralelogramo es $\pi \equiv 0 = \det(\mathbf{MX}, \mathbf{MA}, \mathbf{MB}) = \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-0 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} =$

$$= (x-1)(7) - (y+1)(2) + (z)(1) = 5x - 2y + z - 7 = 0$$

(b)

Determina uno de los otros dos vértices y calcula el área de dicho paralelogramo.

Sabemos que el centro del paralelogramo es el punto M donde se cortan las diagonales del paralelogramo, el cual coincide con el punto medio de una de ellas, por ejemplo la BD .

Calculamos el vértice D con M punto medio de BD

$M(1,-1,0) = ((0+x)/2, (-2+y)/2, (3+z)/2)$, de donde

$$1 = (0+x)/2, \text{ por tanto } x = 2$$

$$-1 = (-2+y)/2, \text{ por tanto } y = 0$$

$$0 = (3+z)/2, \text{ por tanto } z = -3, \text{ luego el vértice } D \text{ es } D(2,0,-3)$$

Sabemos que el área del paralelogramo es el módulo del producto vectorial de dos vectores con origen común, por ejemplo $\|\mathbf{AB} \times \mathbf{AD}\|$:

$$\mathbf{AB} = (-2,-3,4); \quad \mathbf{AD} = (0,-1,-2); \quad \mathbf{AB} \times \mathbf{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -3 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \vec{i}(10) - \vec{j}(4) + \vec{k}(2) = (10,-4,2)$$

$$\text{Área paralelogramo} = \|\mathbf{AB} \times \mathbf{AD}\| = \sqrt{(10^2 + 4^2 + 2^2)} = \sqrt{120} \text{ u.a.}$$

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo Junio 2012 específico

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

(a) [1 punto] Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

(b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

(c) [0'5 puntos] Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ para $x \neq -1$ y $x \neq 2$.

(a)

Estudia y calcula las asíntotas de la gráfica de f .

“La recta $x = a$ es una asíntota vertical (A.V.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow a^+} [f(x)] = \infty$ ”

Las A.V. en cocientes de funciones polinómicas suelen ser los números que anulan el denominador, en este caso $x = -1$ y $x = 2$. Veámoslo:

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2(-1)^2}{(0^+)(-1-2)} = \frac{2}{0^-} = -\infty, \mathbf{x = -1 \text{ es una A.V. de } f}$$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2(2)^2}{(3)(0^+)} = \frac{8}{0^+} = +\infty, \mathbf{x = 2 \text{ es una A.V. de } f}$$

“La recta $y = b$ es una asíntota horizontal (A.H.) de $f(x)$ si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x)] = b$ ”

Sabemos que en los cocientes de funciones polinómicas, existen A.H. si el grado del numerador y del denominador coinciden (es nuestro caso), y la A.H. es la misma en $\pm\infty$

$$\text{Como } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2, \mathbf{y = 2 \text{ es una A.H. de } f}$$

No asíntota oblicua (A.O.)

(b)

Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f .

Me están pidiendo la monotonía, que es el estudio de $f'(x)$.

$$f(x) = \frac{2x^2}{(x+1)(x-2)} = \frac{2x^2}{x^2 - x - 2}$$

$$f'(x) = \frac{4x(x^2 - x - 2) - 2x^2(2x - 1)}{(x^2 - x - 2)^2} = \frac{-2x^2 - 8x}{(x^2 - x - 2)^2}$$

Si $f'(x) = 0$; tenemos $(-2x^2 - 8x) = 0 = x(-2x - 8)$, de donde $x = 0$ y $x = -4$, que pueden los extremos relativos.

$$\text{Como } f'(-5) = \frac{-2(-5)^2 - 8(-5)}{(+)} = \frac{-10}{(+)} < 0, f'(x) < 0 \text{ en } x < -4, \mathbf{luego f(x) \text{ es estrictamente decreciente en } x < -4.}$$

$$\text{Como } f'(-2) = \frac{-2(-2)^2 - 8(-2)}{(+)} = \frac{8}{(+)} > 0, f'(x) > 0 \text{ en } -4 < x < 0 - \{-1\}, \mathbf{luego f(x) \text{ es estrictamente creciente en } -4 < x < 0 - \{-1\}.}$$

$$\text{Como } f'(1) = \frac{-2(1)^2 - 8(1)}{(+)} = \frac{-10}{(+)} < 0, f'(x) < 0 \text{ en } x > 0 - \{2\}, \mathbf{luego f(x) \text{ es estrictamente}$$

decreciente en $x > 0 - \{2\}$.

(c)

Calcula, si existe, algún punto de la gráfica de f donde ésta corta a la asíntota horizontal.

Para que la A.H. $y = 2$ corte a $f(x)$, tiene que existir alguna solución de la ecuación $f(x) = 2$, es decir de $\frac{2x^2}{x^2 - x - 2} = 2$. Multiplicamos en cruz $\rightarrow 2x^2 = 2x^2 - 2x - 4 \rightarrow 0 = -2x - 4$, de donde $x = -2$, es decir **se cortan en el punto $(-2, f(-2)) = (-2, 8/4) = (-2, 2)$**

Ejercicio 2 opción B, modelo Junio 2012 específico

[2'5 puntos] Sea f la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 \cdot \cos(x)$. Determina la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto $(\pi, 0)$.

Solución

Una primitiva de f , es $F(x) = \int x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx$, que es una integral por partes.

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

Calculamos primero la integral indefinida.

$$F(x) = \int x^2 \cdot \cos(x) \cdot dx = \{ u = x^2 \rightarrow du = 2x \cdot dx; dv = \cos(x) \cdot dx \rightarrow v = \int \cos(x) \cdot dx = \text{sen}(x) \} = x^2 \cdot \text{sen}(x) - \int 2x \cdot \text{sen}(x) \cdot dx = x^2 \cdot \text{sen}(x) - I_1$$

$$I_1 = \int 2x \cdot \text{sen}(x) \cdot dx = \{ u = 2x \rightarrow du = 2dx; dv = \text{sen}(x) \cdot dx \rightarrow v = \int \text{sen}(x) \cdot dx = -\cos(x) \} = -2x \cdot \cos(x) + \int 2 \cdot \cos(x) \cdot dx = -2x \cdot \cos(x) + 2 \cdot \text{sen}(x), \text{ por tanto:}$$

$$F(x) = x^2 \cdot \text{sen}(x) - I_1 = x^2 \cdot \text{sen}(x) - (-2x \cdot \cos(x) + 2 \cdot \text{sen}(x)) + K = x^2 \cdot \text{sen}(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \text{sen}(x) + K$$

Como pasa por el punto $(\pi, 0)$, tenemos que $F(\pi) = 0$, es decir

$$0 = (\pi)^2 \cdot \text{sen}(\pi) + 2\pi \cdot \cos(\pi) - 2 \cdot \text{sen}(\pi) + K = 0 + 2\pi(-1) - 0 + K, \text{ luego } K = 2\pi, \text{ y la primitiva pedida es } \mathbf{F(x) = x^2 \cdot \text{sen}(x) + 2x \cdot \cos(x) - 2 \cdot \text{sen}(x) + 2\pi}$$

Ejercicio 3 opción B, modelo Junio 2012 específico

Dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} kx + 2y &= 3 \\ -x + 2kz &= -1 \\ 3x - y - 7z &= k + 1 \end{aligned}$$

(a) [1'75 puntos] Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k .

(b) [0'75 puntos] Resuélvelo para $k = 1$.

Solución

(a)

Estudia el sistema para los distintos valores del parámetro k .

La matriz de los coeficientes del sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{pmatrix}$$

Si $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{array} = (k)(2k) - (2)(7-6k) + 0 = 2k^2 + 12k - 14 \neq 0,$$

Resolviendo la ecuación $2k^2 + 12k - 14 = 0$, o bien $k^2 + 6k - 7 = 0$, obtenemos $k = -7$ y $k=1$.

Si $k \neq -7$ y $k \neq 1$, $\det(A) = |A| \neq 0$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 3 = n^\circ$ de incógnitas. **El sistema es compatible y determinado y tiene solución única.**

Si $k = -7$

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -14 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & -6 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A)=2$

En A^* como $\begin{vmatrix} -7 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -6 \end{vmatrix}$ Adjuntos
segunda = $-(-1)(-12+3) + 0 - (-1)(7-6) = -9 + 1 = -8 \neq 0$, tenemos
fila

$\text{rango}(A^*) = 3$. Como $\text{rango}(A) = 2 \neq \text{rango}(A^*) = 3$, **el sistema es incompatible y no tiene solución.**

Si $k = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \text{ y } A^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{pmatrix}.$$

En A como $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, tenemos $\text{rango}(A)=2$

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ Adjuntos
segunda = $-(-1)(4+3)+0-(-1)(-1-6) = 7-7= 0$, tenemos $\text{rango}(A^*) = 2$.
fila

Como $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2 <$ número de incógnitas, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

(b)

Resuélvelo para $k = 1$.

Hemos visto en el apartado anterior que si $k = 1$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, **el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.**

Como el rango es 2, sólo necesitamos 2 ecuaciones. (Tomo las del menor de A distinto de cero con el que hemos determinado el rango, es decir la 1ª y la 2ª).

$$x + 2y = 3$$

$-x + 2z = -1$. Tomo $\mathbf{z} = \mathbf{a} \in \mathbb{R}$, de donde $\mathbf{x} = \mathbf{1} + 2\mathbf{a}$, y entrando en la 1ª ecuación tenemos

$$(1 + 2a) + 2y = 3 \rightarrow 2y = 2 - 2a \rightarrow \mathbf{y} = \mathbf{1} - \mathbf{a}$$

Solución $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\mathbf{1} + 2\mathbf{a}, \mathbf{1} - \mathbf{a}, \mathbf{a})$ con $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 4 opción B, modelo Junio 2012 específico

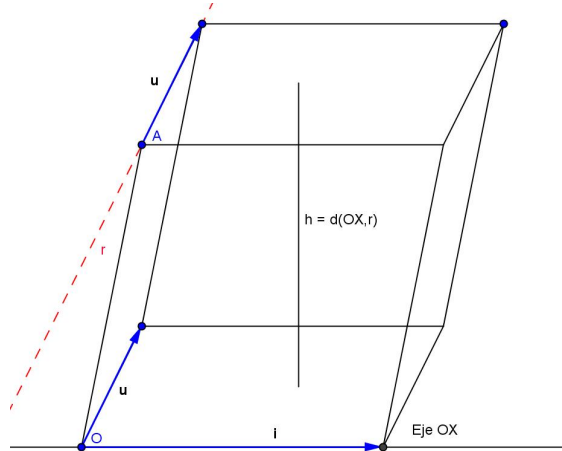
[2'5 puntos] Calcula de manera razonada la distancia del eje OX a la recta r de ecuaciones

$$\begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$$

Solución

Calcularemos la distancia entre las rectas utilizando el volumen del paralelepípedo.

Antes de resolver el problema, haremos un pequeño dibujo, y de cada recta tomaremos un punto y un vector director.



Del eje OX tomamos como punto el origen $O(0,0,0)$ y como vector el $i = (1,0,0)$

De la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - 3y = 4 \\ 2x - 3y - z = 0 \end{cases}$, tomamos como vector u el producto vectorial de los vectores normales de cada plano que determinan a la recta "r".

$$u = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -3 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = i(3) - j(-2) + k(0) = (3,2,0)$$

Para el punto A de "r" tomamos $y = 0$, de donde $x = 2$ y $z = 4$, luego $A(2,0,4)$

Sabemos que el volumen del paralelepípedo es el valor absoluto ($| |$) del producto mixto de tres vectores con origen común ($[OA, i, u]$), pero también es el área de la base (área de un paralelogramo, que es el módulo del producto vectorial de los vectores que lo determinan $||ixu||$) por la altura (h), que es la distancia entre las rectas, es decir:

Volumen del paralelepípedo = $[i, u, OA] = \text{área base} \cdot h = ||ixu|| \cdot d(OX, r)$, de donde la distancia entre las rectas es " $d(OX, r) = | ([OA, i, u]) / (||ixu||) |$ "

$OA = (2,0,4)$; $i = (1,0,0)$; $u = (3,2,0)$

$$ixu = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = i(0) - j(0) + k(2) = (0,0,2), \text{ de donde } ||ixu|| = \sqrt{(2^2)} = 2.$$

$$[OA, i, u] = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2(0) - 0(0) + 4(2) = 8.$$

La distancia pedida es $d(OX, r) = | ([OA, i, u]) / (||ixu||) | = 8/2 = 4 \text{ u.l.}$