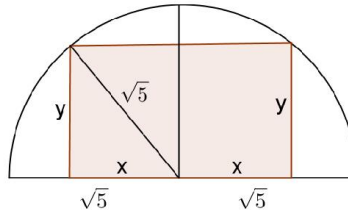


Opción A**Ejercicio 1 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2**

[2'5 puntos] Un rectángulo está inscrito en un semicírculo de $\sqrt{5}$ cm. de radio, de forma que uno de sus lados está contenido en el diámetro del semicírculo y el lado opuesto tiene sus vértices sobre la semicircunferencia. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que es el de mayor perímetro posible.

Solución

Es un problema de optimización



Función a optimizar: Perímetro = $x + x + y + x + x + y = 4x + 2y$

Relación entre las variables: hipotenusa triángulo rectángulo $\rightarrow x^2 + y^2 = (\sqrt{5})^2 = 5$, $y = +\sqrt{5 - x^2}$, es positivo porque es una longitud.

$A(x) = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}$. (Si $A'(b) = 0$ y $A''(b) < 0$, $x = b$ es un máximo de $A(x)$).

$$A(x) = 4x + 2y = 4x + 2\sqrt{5 - x^2}; \quad A'(x) = 4 + 2 \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}.$$

De $A'(x) = 0$, tenemos $4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}} = 0$, es decir $4 = \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}$, por tanto $4 \cdot \sqrt{5 - x^2} = 2x$. Elevando al cuadrado

tenemos $16(5 - x^2) = 4x^2 \rightarrow 80 - 16x^2 = 4x^2 \rightarrow 80 = 20x^2 \rightarrow x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 4$. Sólo vale la solución positiva $x = 2$ (es una longitud).

Es decir **las dimensiones del rectángulo son $2x = 4$ cm., $y = \sqrt{5 - (2)^2} = 1$ cm.**

Veamos para terminar que es un máximo, es decir $A''(2) < 0$

$$A'(x) = 4 - \frac{2x}{\sqrt{5 - x^2}}; \quad A''(x) = - \frac{2\sqrt{5 - x^2} - 2x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{5 - x^2}}}{(\sqrt{5 - x^2})^2} = - \frac{2\sqrt{5 - x^2} + \frac{2x^2}{\sqrt{5 - x^2}}}{(\sqrt{5 - x^2})^2}, \text{ de donde}$$

$$A''(2) = - \frac{2\sqrt{1} + \frac{2(1)^2}{\sqrt{1}}}{(\sqrt{1})^2} = -4 < 0, \text{ luego es un máximo.}$$

Ejercicio 2 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

[2'5 puntos] Hallar $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

Solución

Hallar $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$. *Sugerencia:* se puede hacer el cambio de variable $t = \sqrt{x}$.

$I = \int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$. Nos dan el cambio $t = \sqrt{x}$, es decir $t^2 = x$, luego $2t \cdot dt = dx$, y sustituyendo nos queda:

$I = \int \frac{1+t^2}{1+t} 2t dt = \int \frac{2t^3 + 2t}{1+t} dt$, que es una integral racional. Dividimos y descomponemos en factores simples el denominador si hiciese falta.

$$\begin{array}{r} 2t^3 \quad + 2t \quad \left| \begin{array}{l} t+1 \\ 2t^2 - 2t + 4 \end{array} \right. \\ \hline -2t^3 - 2t^2 \\ \hline -2t^2 + 2t \\ \hline 2t^2 + 2t \\ \hline 4t \\ \hline -4t - 4 \\ \hline -4 \end{array}$$

Recordamos que $G(x) = \int((C(t)) + R(t)/(div(t)))dt = \int(2t^2 - 2t + 4)dt + \int \frac{-4}{t+1}dt =$

$$= 2t^3/3 - t^2 + 4t - 4 \cdot \ln|t+1| + K = \{\text{quito el cambio } t = \sqrt{x}\} = \frac{2(\sqrt{x})^3}{3} - x + 4 \cdot \sqrt{x} - 4 \cdot \ln|\sqrt{x} + 1| + K.$$

Ejercicio 3 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

a) [1'5 puntos] Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

b) [1 punto] Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6.

Solución

Considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$$

a)

Determina el valor de m para el que al añadir la ecuación $x + my + 4z = -3$ al sistema anterior se obtenga un sistema con las mismas soluciones.

Como el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$, es un sistema de dos ecuaciones con tres incógnitas el sistema es compatible e indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Para el que al añadir la ecuación, $x + my + 4z = -3$, al sistema anterior, es decir

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + my + 4z = -3 \end{cases}, \text{ se}$$

obtenga un sistema con las mismas soluciones, la matriz de los coeficientes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{pmatrix}$, y la matriz

ampliada $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & m & 4 & -3 \end{pmatrix}$, tienen que tener rango 2.

A tiene rango 2 si $\det(A) = 0 = |A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 - F_2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & m & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 3(12+m) - 2(9) = 18 + 3m$. De la

ecuación $18 + 3m = 0$, tenemos $m = -6$.

Si $m = -6$, $\text{rango}(A) = 2$.

Si $m = -6$, la matriz ampliada es $A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 1 & -6 & 4 & -3 \end{pmatrix}$,

En A^* como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & -6 & -3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{fila} \end{matrix} = 1(9) - (-1)(-9) = 0$, luego $\text{rango}(A^*) = 2$.

Tomando $m = -6$, $\text{rango}(A) = \text{rango}(A^*) = 2$, el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \end{cases}$ y el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + my + 4z = -3 \end{cases}$

tienen las mismas soluciones.

b)

Calcula la solución del sistema para la que la suma de los valores de las incógnitas sea 6 ($x+y+z=6$).

Me están pidiendo que resuelva el sistema $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3 \\ x + y + z = 6 \end{cases}$.

Lo haremos por reducción (Gauss)

$$\begin{aligned} x - y + z = 0 & \rightarrow x - y + z = 0 \\ 2x + 3y - z = 3. (F_2 - 2F_1) & \rightarrow 5y - 3z = 3. \\ x + y + z = 6 (F_3 - F_1) & \rightarrow 2y = 6, \text{ de donde } y = 3. \end{aligned}$$

De $5(3) - 3z = 3$, tenemos $12 = 3z$, luego $z = 4$.

De $x - (3) + (4) = 0$, tenemos $x = -1$.

Solución $(x,y,z) = (-1, 3, 4)$.

Ejercicio 4 opción A, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.

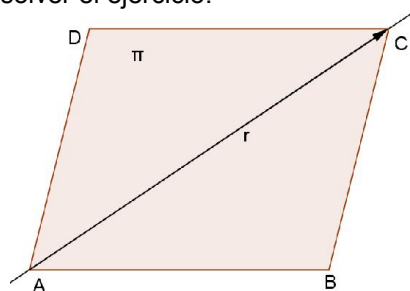
- [1 punto] Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.
- [1 punto] Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.
- [0'5 puntos] Calcula las coordenadas del vértice D.

Solución

Del paralelogramo ABCD se conocen los vértices $A(-1,0,3)$, $B(2,-1,1)$ y $C(3,2,-3)$.

- Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

La siguiente figura nos ayudará a resolver el ejercicio.



La ecuación del plano está determinada por un punto, el $A(-1,0,3)$, y dos vectores independientes, el $\mathbf{AB} = (3,-1,-2)$ y $\mathbf{AC} = (4, 2,-6)$

La ecuación paramétrica del plano es $\pi \equiv \begin{cases} x = -1 + 3\lambda + 4\mu \\ y = 0 - \lambda + 2\mu \\ z = 3 - 2\lambda - 6\mu \end{cases}$, con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- Halla la ecuación de la recta que contiene a la diagonal AC del paralelogramo.

Para una recta "r" necesitamos un punto, el $A(-1,0,3)$ y un vector director, el $\mathbf{u} = \mathbf{AC} = (4, 2,-6)$.

La ecuación continua de la recta "r" es $\frac{x+1}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z-3}{-6}$

- Calcula las coordenadas del vértice D.

Como la figura ABCD es un paralelogramo, los vectores \mathbf{AB} y \mathbf{DC} son iguales.

$\mathbf{AB} = (3,-1,-2)$; $\mathbf{DC} = (3-x, 2-y, -3-z)$. De $\mathbf{AB} = \mathbf{DC}$, tenemos $(3,-1,-2) = (3-x, 2-y, -3-z)$, e igualando miembro a miembro:

$$\begin{aligned} 3 = 3 - x & \rightarrow x = 0 \\ -1 = 2 - y & \rightarrow y = 3 \\ -2 = -3 - z & \rightarrow z = -1. \end{aligned}$$

El punto pedido es $D(x,y,z) = (0,3,-1)$.

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

[2'5 puntos] Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x = 1$.

Solución

Considera la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Determina a, b y c sabiendo que la recta

normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$ y que el punto de inflexión tiene abscisa $x=1$.

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Esta función es polinómica, por tanto continua y derivable las veces que sean que se necesiten en \mathbb{R} .

Como $x = 1$ es un punto de inflexión, tenemos $f''(1) = 0$.

Como la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y + x = -3$, tenemos que en $x = 0$ la gráfica de f y la de la recta normal coinciden luego $f(0) = y(0) = -3$.

La pendiente de la recta normal en $x = 0$ es $-1/f'(0)$; pero la pendiente de la recta $y = -x - 3$, es $y' = -1$. Como son iguales tenemos $-1/f'(0) = -1$, de donde $f'(0) = 1$.

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c; \quad f'(x) = 3x^2 + 2ax + b; \quad f''(x) = 6x + 2a.$$

De $f''(1) = 0$, tenemos $6 + 2a = 0$, por tanto $a = -3$.

De $f'(0) = 1$, tenemos $0 + 0 + b = 1$, de donde $b = 1$.

De $f(0) = -3$, tenemos $0 + 0 + 0 + c = -3$, por tanto $c = -3$

Los valores pedidos son $a = -3$, $b = 1$ y $c = -3$, y la función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$.

Ejercicio 2 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).

a) [1'25 puntos] Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

b) [1'25 puntos] Calcula el área del recinto anterior.

Solución

Sea $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $g(x) = |\ln(x)|$ (donde \ln denota el logaritmo neperiano).

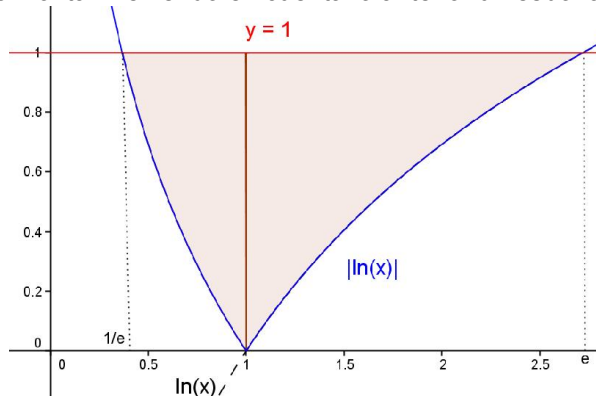
a)

Esboza el recinto limitado por la gráfica de g y la recta $y = 1$. Calcula los puntos de corte entre ellas.

Sabemos que la gráfica de $|\ln(x)|$ es exactamente igual que la de $\ln(x)$ para $\ln(x) > 0$ (la parte de la gráfica que está por encima del eje OX , en este caso para $x \geq 1$ porque $\ln(1) = 0$), y simétrica respecto al eje OX cuando $\ln(x) < 0$ (la parte de la gráfica que está por debajo del eje OX , en este caso para $x < 1$).

Además sabemos que $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\ln(x)$ es estrictamente creciente y que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \ln(0^+) = -\infty$.

La recta $y = 1$ es una recta horizontal. Teniendo en cuenta lo anterior un esbozo de la gráfica pedida es:



Los cortes entre ellas salen de resolver la ecuación $|\ln(x)| = 1$, que son dos ecuaciones:

$\ln(x) = 1$, de donde $x = e^1 = e$ (por recíproca) y $-\ln(x) = 1 \rightarrow \ln(x) = -1$, de donde $x = e^{-1} = 1/e$. **Los puntos de corte pedidos son $(1/e, 1)$ y $(e, 1)$.**

b)

Calcula el área del recinto anterior.

$$\text{Área} = \int_{1/e}^1 (1 - (-\ln(x)))dx + \int_1^e (1 - (\ln(x)))dx = \int_{1/e}^1 (1 + \ln(x))dx + \int_1^e (1 - (\ln(x)))dx = \{++\}$$

Recordamos que $\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - x$, pues es una integral por partes $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$.

$$\int \ln(x)dx = \{ u = \ln(x) \rightarrow du = dx/x; dv = x \rightarrow v = \int dx = x \} = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot dx/x = x \cdot \ln(x) - \int dx = x \cdot \ln(x) - x.$$

$$\{++\} = [x + x \cdot \ln(x) - x]_{1/e}^1 + [x - x \cdot \ln(x) + x]_1^e = [(1 \cdot \ln(1)) - ((1/e) \cdot \ln(1/e))] + [(2(e) - e \cdot \ln(e)) - (2(1) - 1 \cdot \ln(1))] = 0 - ((1/e) \cdot (-1)) + 2e - e \cdot (1) - 2 + 0 = e + 1/e - 2 \approx 1'0862 u^2$$

Ejercicio 3 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) [1'25 puntos] Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).
 b) [1'25 puntos] Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

Solución

Considera las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a)
 Calcula X e Y tales que $X - Y = A^t$ y $2X - Y = B$ (A^t es la matriz traspuesta de A).

$$X - Y = A^t \rightarrow X - Y = A^t$$

$$2X - Y = B \quad (F_2 - F_1) \rightarrow X = B - A^t. \text{ Entrando en la 1ª } \rightarrow Y = X - A^t = (B - A^t) - A^t = B - 2A^t.$$

$$X = B - A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$Y = B - 2A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

- b)
 Calcula Z tal que $AZ = BZ + A$.

De $AZ = BZ + A$, tenemos $AZ - BZ = A$, luego $(A - B) \cdot Z = A$.

Como $A - B = C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, tiene matriz inversa C^{-1} porque $\det(C) = 2 - 3 = 1 \neq 0$,

multiplicamos la expresión $C \cdot Z = A$ por la inversa de C por la izquierda.

$$C^{-1} \cdot C \cdot Z = C^{-1} \cdot A \rightarrow I \cdot Z = C^{-1} \cdot A \rightarrow Z = C^{-1} \cdot A.$$

Calculamos $C^{-1} = (1/|C|) \cdot \text{Adj}(C^t)$

$$C^t = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}; \text{Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}; \text{luego } C^{-1} = (1/|C|) \cdot \text{Adj}(C^t) = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Z = C^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4 opción B, modelo 4 Septiembre 2013 específico 2

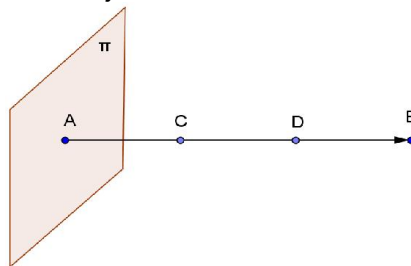
Considera los puntos A(1,2,3) y B(-1,0,4).

- a) [1'25 puntos] Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
 b) [1'25 puntos] Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

Solución

Considera los puntos A(1,2,3) y B(-1,0,4).

- a)
 Calcula las coordenadas de los puntos que dividen al segmento AB en tres partes iguales.
 La siguiente figura nos ayudará a resolver el ejercicio.



Tenemos que $AB = 3AC$, de donde $(-2, -2, 1) = 3(x-1, y-2, z-3) = (3x - 3, 3y - 6, 3z - 9)$. Igualando tenemos:

$$-2 = 3x - 3 \rightarrow 1 = 3x \rightarrow x = 1/3.$$

$$-2 = 3y - 6 \rightarrow 4 = 3y \rightarrow y = 4/3.$$

$$1 = 3z - 9 \rightarrow 10 = 3z \rightarrow z = 10/3.$$

El punto C es $C(x,y,z) = (1/3, 4/3, 10/3)$.

Para calcular el punto D(x,y,z) tenemos en cuenta que D es el punto medio del segmento CB, por tanto:

$$D(x,y,z) = ((1/3 - 1)/2, (4/3 - 0)/2, (10/3 + 4)/2) = (-1/3, 2/3, 11/3) = (-1/3, 2/3, 11/3).$$

- b)
 Halla la ecuación del plano que pasa por el punto A y es perpendicular al segmento AB.

Si observamos la figura vemos que el plano π está determinado por el punto A(1,2,3) y el vector normal

$$n = AB = (-2, -2, 1), \text{ por tanto } \pi \equiv AX \cdot n = 0 = (x-1, y-2, z-3) \cdot (-2, -2, 1) = -2x + 2 - 2y + 4 + z - 3 = -2x - 2y + z + 3 = 0.$$