

2. El Método de los Elementos Finitos.

2.1. Introducción.

El nivel de conocimientos actual permite la formulación correcta de prácticamente cualquier problema que se pueda presentar en el análisis de fenómenos físicos, sin embargo, en la gran mayoría de los casos su resolución exacta no es posible o no es viable debido a la dificultad de hallar una solución analítica para determinadas formulaciones o geometrías complicadas.

La alternativa a esta situación es el empleo de métodos numéricos, que proporcionan soluciones aproximadas para este tipo de problemas. Como métodos numéricos más importantes se puede destacar: el Método de las Diferencias Finitas, el Método de los Elementos de Contorno y el Método de los Elementos Finitos (MEF). Todo lo que se va a comentar a continuación se refiere al último de los tres métodos, que es el que se ha empleado en la realización de este proyecto fin de carrera.

2.2. Fundamento Teórico.

El comportamiento de un sólido deformable sometido a un estado de cargas queda definido una vez conocidas dos magnitudes en cada punto del dominio, estas magnitudes son las tensiones y las deformaciones. Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un problema elástico son las siguientes:

$$\text{- equilibrio: } \sigma_{ij,j} + X_i = 0 \quad (2.2.1)$$

$$\text{- compatibilidad: } \epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e = L u \quad (2.2.2)$$

$$\text{- comportamiento: } \sigma_{ij} = 2G\epsilon_{ij} + \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} = s = D e \quad (2.2.3)$$

Las ecuaciones (2.2.3) se denominan ecuaciones de Lamé. En ellas λ es la constante de Lamé, G es el modulo de elasticidad tangencial y ϵ_{kk} es el cambio unitario de volumen. Las condiciones de contorno necesarias para cerrar el problema son:

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{en } \Gamma_u \quad (2.2.4)$$

$$T_i^{ne} \approx \bar{t}_i \quad \text{en } \partial D_t \quad (2.2.5)$$

$$\partial D = \partial D_u \cup \partial D_t \quad (2.2.6)$$

donde \bar{u}_i son los desplazamientos conocidos en la zona con desplazamiento impuesto, esta zona es ∂D_u , \bar{t}_i es la carga aplicada en el contorno del dominio ∂D_t .

Estas expresiones conforman una formulación diferencial del comportamiento de un sólido deformable, en esta formulación diferencial se imponen las ecuaciones en cada punto del dominio continuo del sólido elástico. Se puede realizar una formulación integral empleando el Principio de los Trabajos Virtuales (PTV). La formulación del PTV se muestra a continuación.

$$\int_V \mathbf{e}^T \mathbf{s} dV - \int_V \mathbf{X} dV - \int_D \mathbf{t}^c dS \quad (2.2.7)$$

donde:

- \mathbf{s} , \mathbf{X} y \mathbf{t}^c son respectivamente el campo de tensiones, de fuerzas de volumen y de fuerzas de contorno en equilibrio.
- \mathbf{e}^T , \mathbf{X} y \mathbf{t}^c representan un campo de deformaciones y desplazamientos compatibles, aunque no necesariamente la solución del problema elástico para el sistema de tensiones en equilibrio.

En función del sistema virtual que se emplee en el PTV se puede obtener una ecuación integral de compatibilidad, si se emplea un campo virtual de fuerzas y tensiones en equilibrio. Empleando un campo virtual de desplazamientos y deformaciones compatibles se obtiene una ecuación integral de equilibrio. Este último caso es el que se emplea en el MEF.

En esta formulación integral del comportamiento de un sólido deformable no es necesario que se cumplan las ecuaciones de equilibrio en cada punto del sólido continuo sino sólo que se cumpla el equilibrio de manera global.

Con el MEF se consigue a través del PTV la formulación del problema elástico como un sistema de ecuaciones algebraicas. Esto se consigue por medio de la discretización. La discretización se emplea con un doble sentido, físico y matemático. Se muestra a continuación el proceso general de obtención de las ecuaciones algebraicas a través de la aplicación del MEF

En primer lugar se definen unos vectores con las variables principales del problema elástico, que son deformaciones, tensiones y desplazamientos, en el caso bidimensional serían las que siguen.

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{yy} \\ \epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Las deformaciones se pueden obtener a partir de los desplazamientos definiendo un operador diferencial \underline{L} de la manera que sigue:

$$\underline{\epsilon} = \underline{L} \cdot \underline{u} \quad (2.2.9)$$

Las tensiones se expresan en función de las deformaciones mediante la Ley de Comportamiento.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{\epsilon} \quad (2.2.10)$$

Sustituyendo (2.2.9) en (2.2.10) se expresan las tensiones en función de los desplazamientos.

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u} \quad (2.2.11)$$

Introduciendo en el PTV estos vectores y las relaciones entre ellos se obtiene la formulación que sigue.

$$\int_V \underline{u}^{*T} \cdot \underline{L}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u} \cdot dV - \int_V \underline{u}^{*T} \cdot \underline{f} \cdot dV - \int_D \underline{u}^{*T} \cdot \underline{t} \cdot dS \quad (2.2.12)$$

donde:

- \underline{f} y \underline{t} son respectivamente las fuerzas de volumen y de contorno.
- \underline{u}^* es el sistema virtual de desplazamientos y deformaciones compatible.

La próxima operación que se realiza es la discretización matemática de los desplazamientos. Esta discretización se realiza aproximando de la misma forma los desplazamientos del problema real y del virtual. La discretización de los desplazamientos se realiza a través de la discretización física del problema, para ello se divide la geometría original en un número determinado de elementos que sólo cuentan con una serie de grados de libertad en vez de los infinitos que tiene originalmente el medio continuo. Los desplazamientos, variables principales del problema, como se ve en (2.2.12), se obtienen en los nodos. Para forzar la compatibilidad de los desplazamientos se obliga a que nodos en la misma posición pero pertenecientes a distintos elementos tengan desplazamientos iguales. La discretización de los desplazamientos se realiza mediante de pequeño soporte o funciones de forma \underline{N} que aproximan, el campo de desplazamientos en esa zona del sólido. Normalmente se aproximan con las mismas funciones de forma los desplazamientos en las tres direcciones del espacio para conseguir que el resultado no dependa de la orientación del sistema de referencia. La aproximación sería de la siguiente manera.

$$- \text{ Sistema real de desplazamientos. } \quad \underline{u} \quad ? \quad \underline{N} \quad ? \quad (2.2.13)$$

$$- \text{ Sistema virtual de desplazamientos. } \quad \underline{u}^* \quad ? \quad \underline{N} \quad ?^* \quad (2.2.14)$$

$$- \text{ Deformaciones en el sistema real. } \quad \underline{\epsilon} \quad ? \quad \underline{L} \cdot \underline{N} \quad ? \quad \underline{\epsilon} \quad ? \quad \underline{B} \quad ? \quad (2.2.15)$$

$$- \text{ Deformaciones en el sistema virtual. } \quad \underline{\epsilon}^* \quad ? \quad \underline{L} \cdot \underline{N} \quad ?^* \quad \underline{\epsilon}^* \quad ? \quad \underline{B} \quad ?^* \quad (2.2.16)$$

En este punto es necesario aclarar que en la matriz \underline{B} están contenidas las derivadas de las funciones de forma, por lo que éstas no pueden ser nulas. Introduciendo las expresiones anteriores en el PTV se obtiene la formulación final.

$$\underline{\epsilon}^{*T} \cdot (\int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dV) \cdot \underline{\epsilon} \quad ? \quad \underline{\epsilon}^{*T} \cdot (\int_V \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot dV) \cdot f \quad ? \quad \underline{\epsilon}^{*T} \cdot (\int_D \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot ds) \cdot t \quad (2.2.17)$$

La expresión anterior se debe cumplir para cualquier campo virtual de desplazamientos nodales, con lo que se obtiene.

$$\underline{K} \cdot \underline{\epsilon} \quad ? \quad \underline{P}_f \quad ? \quad \underline{P}_t \quad (2.2.18)$$

donde:

- \underline{K} es la matriz de rigidez del sistema, obtenida de $\underline{K} \quad ? \quad \int_V \underline{B}^T \cdot \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot dv$
- \underline{P}_f es el vector de fuerzas de volumen: $\underline{P}_f \quad ? \quad (\int_V \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot dv) \cdot f$
- \underline{P}_t es el vector de fuerzas de contorno $\underline{P}_t \quad ? \quad (\int_D \underline{N}^T \cdot \underline{N} \cdot ds) \cdot t$

En el MEF se obtienen las cargas concentradas en los nodos a partir de la integración en el dominio o en el contorno de las cargas volumétricas o superficiales respectivamente, por lo que no se puede obtener la evolución de los diagramas de esfuerzos en una geometría cualquiera. Una vez resuelto un problema elástico con el MEF se obtiene la distribución de las variables en los nodos, por lo que la única manera de aproximar la solución obtenida a la real es realizar una discretización más fina del dominio físico para obtener así una evolución más parecida a la real.

2.3. Funciones de Aproximación. Integración y Convergencia.

Las funciones de forma más empleadas en la aproximación del campo de desplazamientos son las polinómicas. Los requisitos que hay que imponer a unas funciones de forma para que se empleen como funciones de forma son continuidad interna, derivabilidad y complitud. Continuidad para que los desplazamientos sean continuos. Derivabilidad para que

estén definidas las deformaciones y complitud para que éstas se puedan integrar y obtener así las matrices de rigidez elementales.

En un dominio físico discretizado es necesario que exista continuidad y compatibilidad entre los elementos. Esto se consigue con funciones de forma de pequeño soporte que sólo dependen del desplazamiento de los puntos que llegan a cada elemento. La compatibilidad en las líneas interelementales no es necesaria sino que lo realmente importante es la convergencia de la solución respecto del número de elementos, es decir, que al refinar el mallado se obtenga un resultado más parecido a la realidad.

Las integrales necesarias para obtener la matriz de rigidez y las cargas nodales se realizan de manera numérica mediante cuadraturas de Gauss. Las cuadraturas de Gauss dan una mejor o peor aproximación al resultado real en función del orden del polinomio que haya en el integrando. La expresión monodimensional de la cuadratura de Gauss sería:

$$\int_{x_1}^{x_2} f(x) dx \approx \sum_{i=1}^{n_g} f(x_i) \cdot w_i \quad (2.3.1)$$

donde:

- n_g es igual al número de puntos de cuadratura.
- x_i son las abcisas en las que se evalúa f .
- w_i son los pesos, que dependen del número de puntos de evaluación.

La expresión general anterior se emplea normalizada mediante un cambio de variables que haga que los límites de integración no dependan de las dimensiones del elemento. Se emplean para ello las coordenadas generalizadas ξ_i .

$$\int_{\xi_1}^1 f(\xi) \cdot \frac{dx}{d\xi} d\xi \approx \sum_{i=1}^{n_g} f(\xi_i) \cdot w_i \cdot |J| \quad (2.3.2)$$

donde $|J|$ representa el determinante del Jacobiano.

Empleando la expresión anterior se integra de forma exacta polinomios de orden $2 \cdot n_g - 1$. En función del orden del integrando se emplea un número de puntos de integración u otros. El problema es que al integrar en el dominio normalizado el orden del integrando está afectado por el Jacobiano, para elementos muy distorsionados se requiere una aproximación de la integral de orden muy alto, que en la práctica no se realiza.

Las tensiones se pueden obtener como variables derivadas a través de la expresión:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{u} = \underline{D} \cdot \underline{L} \cdot \underline{N} \cdot \underline{\xi} = \underline{D} \cdot \underline{B} \cdot \underline{\xi} \quad (2.3.3)$$

La matriz \underline{B} contiene las derivadas de las funciones de forma, por lo que la aproximación de las tensiones es de un orden menor que los desplazamientos. Para obtener un error menor en

las tensiones se evalúan en las abscisas de integración, ya que una cuadratura de un orden menor a la función del integrando da resultados exactos si se evalúa en los puntos de integración. Una vez obtenidas las tensiones en los puntos de Gauss se extrapola el resultado a los nodos. Las tensiones nodales de cada elemento no tienen por que ser iguales en los elementos que concurren en un mismo nodo. ANSYS[®] asigna al nodo la media de los valores nodales obtenidos en los elementos de la parcela. Una forma de comprobar los resultados de un análisis es obtener las diferencias de las tensiones entre elementos contiguos, si estas diferencias son del orden de las tensiones entonces el mallado no es válido y se debe refinar para representar mejor la evolución de las variables.

La convergencia en una malla de elementos finitos se refiere al aumento de la precisión con el número de elementos. Al aumentar el número de elementos en un sólido elástico mallado se incrementa el número de grados de libertad de la malla por lo que se obtiene un modelo más elástico. Esto implica que ante las mismas cargas la nueva malla tendrá desplazamientos mayores y más próximos a los reales. En la práctica hay un número de grados de libertad a partir del cual los desplazamientos ya no aumentan, entonces se ha llegado a la solución real del problema y ya no supone ninguna ventaja aumentar el número de elementos de la malla.

2.4. Problemas no lineales y el Método de los Elementos Finitos.

En el MEF se pueden dar principalmente dos tipos de problemas no lineales. El primer tipo es el caso no-linealidad física o del material que da lugar a leyes constitutivas no lineales. El segundo tipo son las no linealidades geométricas, derivadas de variaciones no infinitesimales en la geometría del dominio elástico.

Según el tipo de no-linealidad que se presente en un caso concreto se puede distinguir tres tipos de problemas. De manera sucinta estos tres tipos de problemas son la no-linealidad del material, no-linealidad geométrica y ambas de manera conjunta.

El primer tipo, el caso de leyes constitutivas no lineales, es el más fácil de comprender. Este tipo de no-linealidad aparece en problemas en los que tensiones y deformaciones no son linealmente dependientes, pero en los cuales sigue siendo válida la hipótesis de pequeños desplazamientos, es decir, se puede establecer el equilibrio en la geometría indeformada. Este tipo de problemas son relativamente frecuentes, por ejemplo, en el análisis elasto-plástico de estructuras.

En el caso de tener no-linealidad geométrica a pesar de contar con leyes constitutivas lineales la relación entre las fuerzas y desplazamientos es no lineal. Este tipo de problemas es el

caso de grandes desplazamientos. Un problema típico de esta clase es el estudio elástico del pandeo de estructuras.

El último caso es el más general y engloba la situación de tener leyes constitutivas no lineales y grandes desplazamientos. Esta situación es la que se presenta en el conformado plástico de metales, en los que hay grandes desplazamientos y comportamiento no lineal.

Los métodos de resolución de estos tres tipos de problemas no lineales son prácticamente iguales por lo que se explicará la metodología de resolución del primer tipo de ellos. La forma de resolver problemas de este tipo es relativamente sencilla de comprender.

La resolución de problemas no lineales mediante el MEF se realiza con alguna de las tres técnicas siguientes: técnicas incrementales, métodos iterativos o de Newton y por último técnicas de resolución mixtas.

Para simplificar se analizará tan sólo la ecuación de equilibrio no lineal para un único elemento:

$$\underline{K} \cdot \underline{d} = \underline{F} \quad (2.4.1)$$

La no-linealidad aparece en la matriz de rigidez, que es función de las propiedades no lineales del material. Se puede representar entonces la no-linealidad de las propiedades del material mediante la relación siguiente:

$$\underline{K} = \underline{K}(\underline{d}, F) \quad (2.4.2)$$

Para poder resolver el problema no lineal es imprescindible conocer la ley constitutiva del material, esta relación no lineal se representa mediante la expresión que sigue.

$$\underline{d} = C(\underline{d}) \cdot \underline{d} \quad (2.4.3)$$

2.4.1. Técnicas Incrementales.

La base del procedimiento incremental es la división de la carga en varias cargas pequeñas o incrementos. La carga se aplica mediante un incremento cada vez, y durante la aplicación de este incremento se supone que las ecuaciones son lineales, es decir, se emplea un valor constante de la matriz \underline{K} en cada incremento, modificando la matriz entre cada incremento de carga. La solución en cada paso de carga es obtenida en términos de incrementos de desplazamientos \underline{d} . Los incrementos de desplazamientos calculados se acumulan para obtener los desplazamientos al final de cualquier paso de carga. El proceso incremental se repite hasta que se ha aplicado toda la carga. Básicamente, mediante el procedimiento incremental se aproxima el problema no lineal mediante una sucesión de problemas lineales.

En el procedimiento incremental se parte de una solución en equilibrio dada por \underline{F}_0 y \underline{d}_0 . Usualmente este estado inicial de equilibrio suele ser la situación indeformada pero podría ser cualquier otra situación en equilibrio. La carga inicial se divide en M incrementos de manera que la carga efectiva será dada por:

$$\underline{F} = \underline{F}_0 + \sum_{j=1}^M \Delta F_j \quad (2.4.4)$$

donde Δ es la notación que se emplea para designar un incremento finito. Para los desplazamientos se emplea una notación similar, de manera que el desplazamiento se obtendrá de:

$$\underline{d} = \underline{d}_0 + \sum_{j=1}^M \Delta d_j \quad (2.4.5)$$

Para obtener cada incremento de desplazamiento se emplea un valor constante de la rigidez que se evalúa al final del incremento anterior, con lo que en cada incremento se resuelve la ecuación siguiente:

$$\underline{K}_{i21} \Delta d_i = \Delta F_i \quad (2.4.6)$$

donde la matriz de rigidez se obtiene con la evaluación de las variables en el paso anterior:

$$\underline{K}_{i21} = \underline{K}_{i21}(\underline{d}_{i21}, \underline{F}_{i21}) \quad (2.4.7)$$

y donde se obtiene la matriz de rigidez inicial \underline{K}_0 a partir de las propiedades del material obtenidas de la curva tensión deformación en el inicio de la carga. El procedimiento incremental queda reflejado esquemáticamente en la siguiente figura.

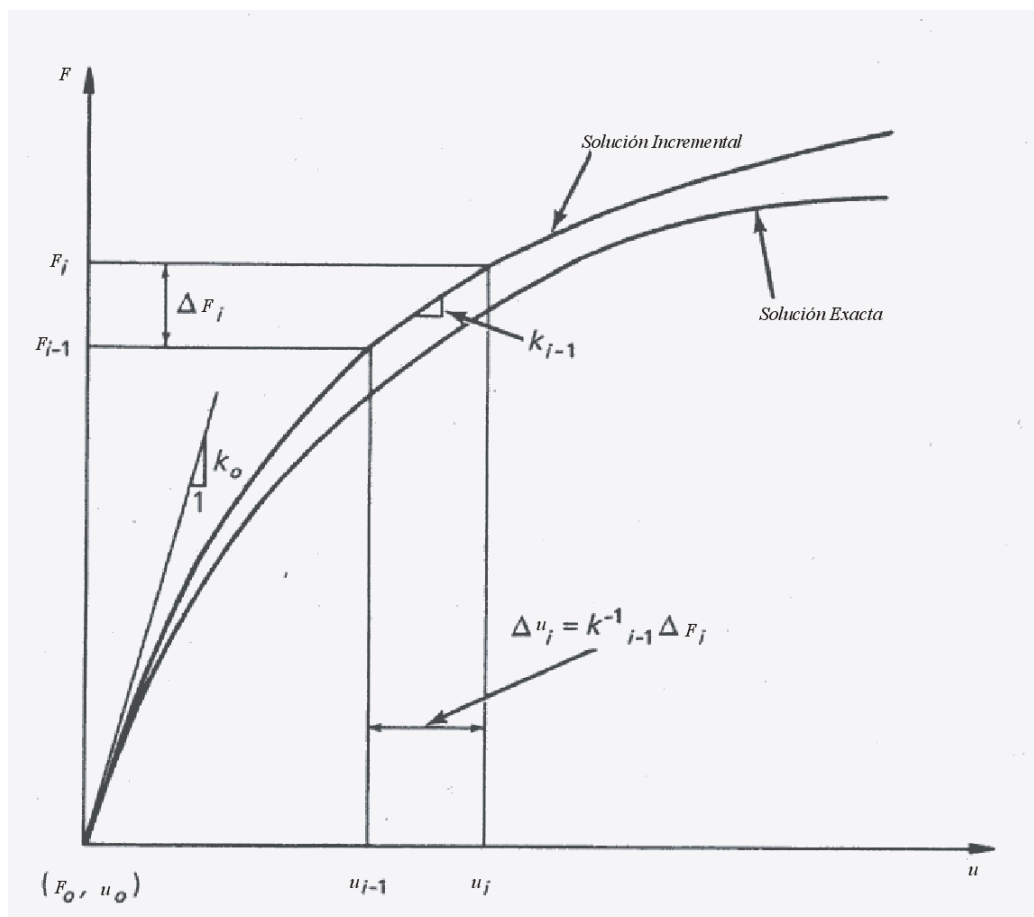


Ilustración 2-1. Procedimiento incremental.

Normalmente se emplea el módulo tangente para evaluar la ley constitutiva del material con lo que se obtiene $C(s)$ y permite entonces obtener la matriz de rigidez \underline{K} . Por ello se denomina a esta matriz de rigidez la matriz de rigidez tangente.

La precisión del método iterativo se puede mejorar empleando menores incrementos de la carga aplicada. Pero como en cada incremento se debe obtener un a nueva matriz de rigidez el incremento en la precisión se produce a costa de un aumento del coste computacional.

2.4.2. Técnicas Iterativas.

Las técnicas iterativas constan de una serie de cálculos que comienzan aplicando toda la carga. En cada iteración se emplea un valor aproximado y constante de la rigidez, así que el equilibrio no se alcanza en cada iteración. La carga que no está equilibrada se calcula y se aplica en la siguiente iteración para obtener una nueva solución. Este proceso se repite hasta que se alcanza el equilibrio dentro de una cierta tolerancia. Luego la técnica iterativa se basa en emplear sucesivas iteraciones de una solución hasta que se alcanza el equilibrio con la carga total aplicada.

Si \underline{F}_0 y \underline{d}_0 son las cargas y desplazamientos iniciales, no necesariamente nulas en general, entonces el residuo en la i -ésima iteración del problema se determina mediante:

$$\underline{F}_j = \underline{F} - \underline{F}_{e,i-1} \quad (2.4.7)$$

donde \underline{F} es la carga total aplicar y $\underline{F}_{e,i-1}$ es la carga equilibrada obtenida en el paso anterior. Los incrementos de desplazamientos se obtienen en cada paso mediante la relación siguiente:

$$\underline{K}_{i-1} \cdot \underline{d}_j = \underline{F}_j \quad (2.4.8)$$

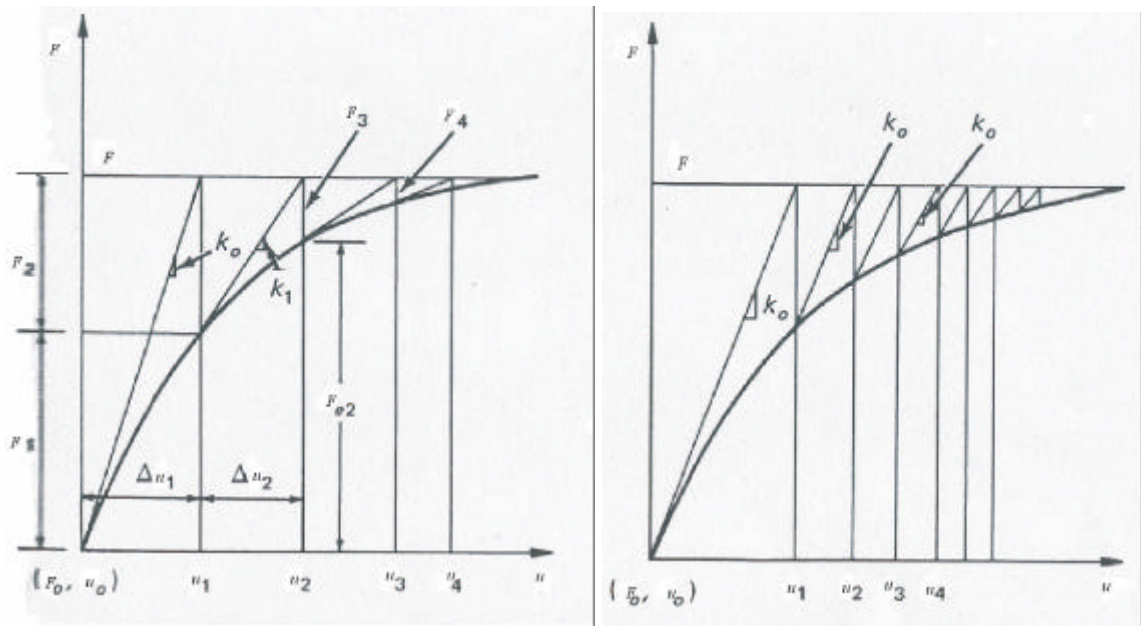
los desplazamientos totales se obtienen en cada iteración mediante:

$$\underline{d}_i = \underline{d}_0 + \sum_{j=1}^i \underline{d}_j \quad (2.4.9)$$

Finalmente $\underline{F}_{e,i}$ se calcula como la carga necesaria para mantener los desplazamientos \underline{d}_i a partir de las deformaciones y de la ley constitutiva del material. El proceso anterior se repita hasta que los incrementos de desplazamientos o la carga se hacen nulos o lo suficientemente pequeños.

La matriz de rigidez que se emplea en cada iteración suele ser la matriz de rigidez tangente en la situación de equilibrio de la iteración anterior. En este caso el algoritmo coincide con un esquema de resolución de Newton-Raphson.

Un procedimiento iterativo modificado consiste en emplear tan solo la rigidez inicial para todas las iteraciones en vez de calcular en cada iteración una nueva matriz de rigidez. Este procedimiento modificado, método de la secante, requiere un mayor número de iteraciones para alcanzar la convergencia pero el coste computacional es menor al no tener que calcular una nueva matriz de rigidez.



(a)

(b)

Ilustración 2-2. Método iterativo. Procedimiento con la matriz de rigidez tangente (a) y con la matriz de rigidez inicial (b).

2.4.3. Técnicas mixtas.

Las técnicas mixtas consisten en emplear una combinación de las técnicas incrementales e iterativas. En este caso la carga se aplica incrementalmente pero después de cada incremento de carga se realizan sucesivas iteraciones para obtener la convergencia.

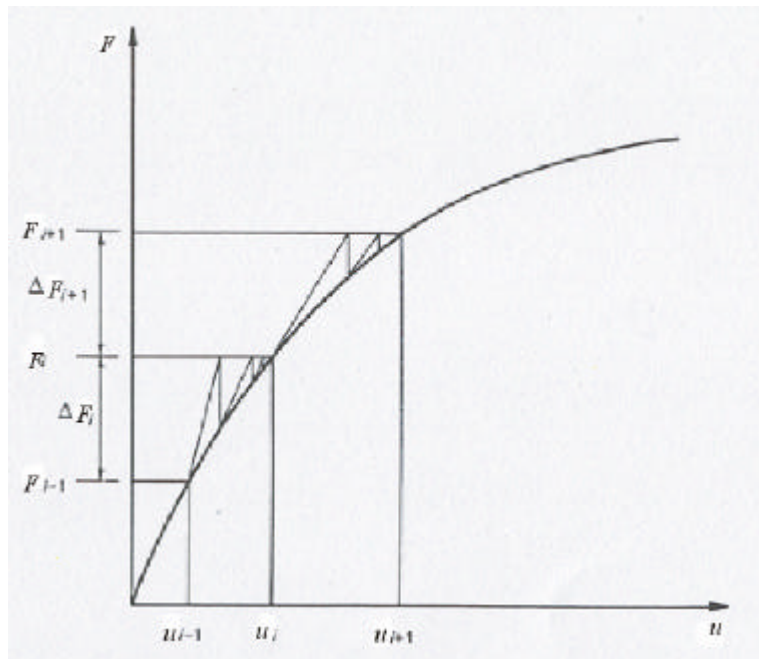


Ilustración 2-3. Técnica mixta.

2.4.4. Comparación entre los procedimientos básicos.

La principal ventaja de la técnica incremental es su generalidad. Se puede aplicar a casi todos los tipos de no-linealidades que se presenten con la excepción de algún tipo de endurecimiento por tensión. Otra importante ventaja de esta técnica es que permite obtener una evolución completa de la curva carga frente a desplazamiento. Por lo que se obtienen resultados válidos, en equilibrio, en los pasos intermedios correspondientes a un incremento de carga.

A pesar de ello la técnica incremental suele requerir más tiempo para resolver y es complicado saber cuáles deben ser los incrementos de carga óptimos para obtener una buena aproximación de la solución. Además en el caso de carecer de una solución analítica o experimental no se puede saber si la solución obtenida es buena. Estas son algunas razones que suelen justificar el uso de las técnicas mixtas, en las cuales al final de cada incremento de carga se obtiene una solución en equilibrio dentro de una cierta tolerancia.

Las técnicas iterativas son más sencillas de implementar y usar, además son más rápidas. Estas técnicas han mostrado ser útiles en el caso de materiales con distinto comportamiento en tracción o compresión. Además son capaces de resolver problemas con endurecimiento por tensión en los cuales fallan las técnicas incrementales.

El problema de las técnicas iterativas es que no siempre se puede asegurar la convergencia de la solución. Además no se pueden aplicar a problemas dinámicos o con histéresis, aunque sí a problemas con endurecimiento pseudoconservativo, como la teoría clásica de la plasticidad. Otra desventaja de las técnicas iterativas es que sólo se obtiene la solución para la carga final con lo que no se obtiene información del proceso de carga. Por último en algunos casos es necesario obtener un estimador inicial no nulo en equilibrio para que la técnica iterativa converja.

Como la técnica mixta combina las ventajas de los dos procedimientos y minimiza sus inconvenientes es la técnica más empleada en general. El incremento en el coste computacional que exigen las técnicas mixtas se compensa con la posibilidad de ajustar la precisión en cada incremento de carga aplicado.

En ANSYS[®] se emplea para la resolución de problemas no lineales el método de Newton-Raphson, es decir, técnicas iterativas. También permite aplicar la carga en incrementos, con lo que se estaría empleando una técnica mixta. Este procedimiento es el de uso general si se está interesado en la evolución de las variables a lo largo del proceso de carga. Existe además la opción de emplear el procedimiento de Newton-Raphson modificado que sería el método de la

tangente, útil en las situaciones en las que la obtención de la matriz de rigidez implica un gran coste computacional.